

## Piano Nazionale Informatica

### Tema di: Matematica 1998

La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti.

1. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti A(-1,0) e B(1,0).

Il candidato:

- scriva l'equazione  $\Gamma_1$ , luogo dei punti per cui è uguale a  $2\sqrt{2}$  la somma delle distanze da A e da B, e l'equazione di  $\Gamma_2$ , luogo dei punti per cui è uguale a  $\sqrt{2}$  la distanza da B;
  - verifichi che  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  hanno due punti C e D in comune e dimostri che CBD è un triangolo rettangolo;
  - determini, eventualmente sfruttando la simmetria della curva  $\Gamma_1$  rispetto all'asse delle ordinate, l'area della regione finita di piano S delimitata dagli archi di  $\Gamma_1$  e di  $\Gamma_2$  appartenenti al semipiano di equazione  $y \geq 0$  e dai segmenti VW e V'W', essendo V, V' e W, W' i punti d'intersezione dell'asse delle ascisse rispettivamente con  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  (V e W di ascissa positiva);
  - considerato il solido T che si ottiene facendo ruotare S di un giro completo attorno all'asse delle ascisse, scriva la funzione  $f(x)$  che esprime l'area della sezione di T con il piano perpendicolare all'asse delle ascisse e passante per il punto P(x,0), distinguendo le varie posizioni di P, e disegni la curva  $\Lambda$  di equazione  $y=f(x)$ ;
  - dica che cosa rappresenta per il solido T l'area della parte di piano compresa tra  $\Lambda$  e l'asse delle ascisse.
- 

2. Sia dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} (k+1)x - y - 1 = 0 \\ 2kx - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 1 + k = 0 \end{cases}$$

Il candidato:

- dica per quali valori di h e k il sistema ammette soluzioni;
- interpretate le equazioni del sistema come quelle di tre rette r, s, t di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dica quali sono le posizioni delle rette quando il sistema ha soluzioni;

- c. nei casi in cui il sistema non ha soluzione, determini, per via algebrica o geometrica, quando le tre rette individuano un triangolo;
- d. in tale condizione, fissato  $h=1$ , studi come varia l'area  $s$  del triangolo al variare di  $k$  e disegni, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $O'ks$ , la curva di equazione  $s=s(k)$ .

**3.** Una macchina produce barre di acciaio a sezione circolare la cui lunghezza ottimale dovrebbe essere di 5 metri ed il diametro della sezione di 4 centimetri. Le barre effettivamente prodotte, che si suppongono tra loro indipendenti, hanno una lunghezza aleatoria con distribuzione normale di media  $m_1=5m$  e scarto standard  $\sigma_1=4cm$ . Il diametro della sezione è una variabile aleatoria, indipendente dalla precedente, e con distribuzione normale di media  $m_2=4cm$  e scarto standard  $\sigma_1=0,8cm$ .

Una generica barra prodotta può essere direttamente venduta senza modifiche se la sua lunghezza è compresa tra 4,95m e 5,05m e la sua sezione tra 2,8cm e 5,2cm.

La tavola della funzione di ripartizione della normale standardizzata è, per alcuni valori, la seguente

Ascissa :x	F(x)
-1,50	0,067
-1,45	0,074
-1,35	0,089
-1,25	0,106
-1,15	0,125
-1,05	0,147
-0,95	0,171
+0,95	0,829
+1,05	0,853
+1,15	0,875
+1,25	0,894
+1,35	0,912

+1,45      0,927

+1,50      0,933

Il candidato:

- a. verifichi che la probabilità  $p$  di poter mettere in vendita senza modifiche una generica barra prodotta è 0,68;
- b. indicata con  $f_n$  la frequenza relativa delle barre direttamente vendibili su  $n$  barre prodotte, esprima, in funzione di  $p$ , la numerosità  $n$  necessaria perché la probabilità che  $f_n$  disti da  $p$  più di 0,05 sia non superiore a 0,05;
- c. dato il valore di  $p$  rilevato in a), se su 2000 barre prodotte 1000 risultano non direttamente vendibili, dica se si può sospettare che la macchina non funzioni secondo lo standard riportato sopra, se, cioè, il risultato ottenuto risulta a priori poco probabile (probabilità inferiore a 0,05) subordinatamente alle modalità di funzionamento della macchina, come indicato;
- d. descriva una procedura che consenta di calcolare la probabilità di ottenere la prima barra direttamente vendibile solo all' $n$ -esima prova, al variare di  $p$  e di  $n$ , e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.