Sessione ordinaria 1999

ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto x_0.

   a. Dire se la condizione $f'(x_0) = 0$ è:

   - necessaria ma non sufficiente,
   - sufficiente ma non necessaria,
   - necessaria e sufficiente

   per concludere che la funzione ha un estremo relativo nel punto x_0. Fornire una esauriente dimostrazione della risposta.

   b. Posto $f(x) = \dfrac{x^3}{ax+b}$, dove a, b sono parametri reali, determinare tali parametri in modo che la curva γ di equazione cartesiana $y = f(x)$ abbia un estremo relativo nel punto di coordinate $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{27}{32}\right)$.

   c. Controllato che la curva γ cercata si ottiene per $a = 2$, studiare tale curva e disegnarne l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

   d. Nello stesso piano (Oxy) disegnare l'andamento della curva γ' di equazione $y = f'(x)$, dopo aver determinato, in particolare, le coordinate dei punti comuni a γ e γ'.

   e. Sussiste un'evidente relazione fra l'andamento di γ e quello di γ'. Quale?

2. In un piano α sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza data r ed una parabola p passante per gli estremi A, B di un diametro di k e avente come asse di simmetria l'asse del segmento AB. L'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola p e dal segmento AB è $\dfrac{8}{3}r^2$.

   Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

   a. determinare l'equazione della circonferenza k;
   b. determinare l'equazione della parabola p;
   c. trovare le coordinate dei punti comuni a k e p;
   d. calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k;
   e. stabilire per quale valore di r la maggiore di tali aree è uguale a $\dfrac{32+22\pi-15\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}^2$.

3. Considerato il quadrato ABCD, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $T\hat{A}B$ misuri 2x radianti. Si conduca quindi per T la retta tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente.

    a. Esprimere in funzione di x il rapporto:
    $$f(x) = \frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{\overline{AT}}$$
    b. Studiare la funzione f(x) ottenuta, tenendo conto dei limiti imposti alla variabile x dalla questione geometrica, e disegnarne il grafico in un piano cartesiano ai fini della risoluzione del punto c).
    c. Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il rapporto considerato sia uguale ad un numero reale k assegnato.
    d. Verificare che il rapporto f(x) può essere scritto nella seguente forma:
    $$f(x) = 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + 1}.$$
    e. Stabilire che risulta:
    $$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.