

ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è data la parabola γ di equazione:

$$y = \frac{x^2}{2} - x$$

Siano A un punto dell'asse x di ascissa λ , con $\lambda > 0$, B il suo simmetrico rispetto ad O , A' e B' i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse x sono rispettivamente A e B . Il candidato:

- (a) verifichi che le tangenti a e b alla parabola γ , rispettivamente in A' e B' , s'incontrano in un punto E dell'asse y ;
 - (b) detti C e D i rispettivi punti d'intersezione di a e b con l'asse x , esprima in funzione di λ l'area s del triangolo CED ;
 - (c) studi la funzione $s(\lambda)$ e tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'\lambda s$, la curva C di equazione $s = s(\lambda)$;
 - (d) detto λ_0 il valore di λ per cui s assume valore minimo relativo, e detti a_0 e b_0 le posizioni di a e di b per detto valore, calcoli l'area della regione finita del semipiano di equazione $y \leq 0$, compresa tra γ , a_0 e b_0 ;
 - (e) osservato che, nell'ipotesi posta di $\lambda > 1$, esistono due valori λ_1 , e λ_2 , con $\lambda_1 < \lambda_2$, per cui il triangolo CED è equivalente al quadrato di lato OA , descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di λ_1 con un'approssimazione di 10^{-n} e la codifichi in un linguaggio programmazione conosciuto.
2. In un piano α è assegnato il triangolo ABC , retto in B , i cui cateti AB e BC misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto A la perpendicolare al piano α e sia V un punto di questa per cui $VA = AB$. Il candidato:
- (a) dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro $VABC$, anche la faccia VBC è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è VBC ,
 - (b) calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro;

- (c) detto M il punto medio di VA e P un punto dello stesso segmento a distanza x da V . esprima in funzione di x il volume v del tetraedro $MPQR$, essendo Q ed R le rispettive intersezioni degli spigoli VB e VC con il piano β parallelo ad α e passante per P ;
- (d) studi come varia v al variare di P sul segmento VA , determinando in particolare la posizione \bar{P} di P in cui il volume v assume valore massimo assoluto;
- (e) detto D il punto medio di VB ed E il punto di AC tale che $AE = AB$, determini la posizione P^* di P che rende minima la somma $DP + PE$ (si consiglia di far ruotare il triangolo VAB attorno ad AV fino a portarlo nel piano del triangolo VAE , simmetricamente a quest'ultimo, e considerare la somma $D'P + PE$, essendo D' il corrispondente di D nella suddetta rotazione).

3. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti $P(x, y)$, $A(x', y')$, $B(x'', y'')$, $P'(X, Y)$, legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} ; \quad \begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases} ; \quad \begin{cases} X = x'' + 2 \\ Y = y'' - 1 \end{cases}$$

Il candidato:

- (a) dica la natura delle trasformazioni T_1, T_2, T_3 , rappresentate rispettivamente dalle predette equazioni;
- (b) determini la trasformazione T che fa passare da P a P' ;
- (c) studi la trasformazione T enunciandone le proprietà e determinandone, in particolare, gli eventuali elementi uniti;
- (d) considerati i punti $C(3, 0)$, $D(0, \sqrt{3})$, $E(0, -\sqrt{3})$, e detti γ la circonferenza per tali punti, a la retta CD , γ' ed a' i trasformati di γ ed a mediante T , determini l'area delle regioni finite di piano delimitate da γ' ed a' ;
- (e) determini il perimetro delle stesse regioni.

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.