ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2000
Tema di Matematica

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che:

[1] $$\int_0^1 f(x)\,dx = 2 \quad e \quad \int_0^2 f(x)\,dx = -5.$$

a. Di ciascuno dei seguenti integrali:
$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx, \qquad \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx, \qquad \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx, \qquad \int_0^1 f(2x)\,dx,$$
dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo.

b. Posto: $f(x) = a\,x^3 + bx + c$,
dove a, b, c sono parametri reali con a ¹ 0, determinare le curve di equazione y = f(x) che soddisfano alle condizioni [1].

c. Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima.

d. Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata - 4 .

e. Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno.

2. Il rettangolo ABCD è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata a.

a. Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.

b. Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato AD prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno
$$\frac{2}{\sqrt{13}}.$$
Calcolare il volume della piramide di vertice V e base ABCD.

c. Condotto il piano a parallelo al piano della faccia VAD della piramide, ad una distanza x da questo, in modo però che a sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di x l'area del poligono sezione.

d. Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano a divide la piramide nel caso in cui
$$x = \frac{a}{2}.$$

3. Il candidato dimostri i seguenti enunciati:

a. Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.

b. Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$,
se r è il raggio della sfera.
Il candidato chiarisca, infine, il significato di n! (***fattoriale di n***) e il suo legame con i coefficienti binominali.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.