

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Sperimentale PNI 2000
Tema di Matematica

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale tale che valgano le seguenti condizioni:

$$f(x_0) > 0, f'(x_0) > 0, f''(x_0) = 0,$$

dove x_0 è un particolare valore reale.

a. Spiegare perché tali condizioni non sono sufficienti a determinare l'andamento di $f(x)$ in un intorno di x_0 .

b. Trovare almeno tre funzioni polinomiali $f(x)$, di grado superiore al 1°, aventi andamenti diversi in $x_0 = 0$, tali che:

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 0.$$

c. Determinare, se possibile, tutte le rette tangenti ai grafici delle funzioni trovate e parallele alla retta di equazione $y = x + 1$.

d. A completamento del problema dimostrare la formula che esprime la derivata, rispetto ad x , della funzione x^n , dove n è un intero qualsiasi non nullo.

2. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti: $A(0, 2)$, $B(1, 1)$, $C(1, 0)$.

a. Trovare l'equazione della circonferenza g inscritta nel triangolo OAB.

b. Determinare le equazioni dell'affinità a che ha come punti uniti i punti O e C e trasforma il punto B nel punto A.

c. Calcolare l'area del triangolo CAA', dove A' è il punto trasformato di A nell'affinità a .

d. Stabilire se l'affinità a ha altri punti uniti, oltre ad O e C, e trovare le sue rette unite.

e. Stabilire quali, fra le rette unite trovate, risultano tangenti o esterne a g .

3. Assegnata la funzione: $f(x) = a \cdot \log^2 x + b \cdot \log x$

dove il logaritmo si intende in base e , il candidato:

- a. determini per quali valori di a e b la $f(x)$ ha un minimo relativo nel punto; $(\sqrt{e}; -\frac{1}{4})$
- b. disegni la curva grafico della $f(x)$ per i valori di a e di b così ottenuti e calcoli l'area della regione finita da essa delimitata con l'asse x .

Calcoli infine la probabilità che lanciando un dado cinque volte, esca per tre volte lo stesso numero.

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura