

A. S. 2000/2001
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

- a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
- b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x+y=4$.
- c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1,1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
- d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t .
- e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k .

PROBLEMA 2.

Considerato un qualunque triangolo ABC , siano \underline{D} ed \underline{E} due punti interni al lato BC tali che:

$$BD=DE=EC.$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE .

- a) Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC .
- b) Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $\hat{A}BC$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB} = 13a$, $\overline{BC} = 15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.
- c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C .
- d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC .

A. S. 2000/2001
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO.

1. Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \approx l$ per $x \approx a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0)=2$. Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2x e^x},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

3. Si consideri il cubo di spigoli AA' , BB' , CC' , DD' , in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB . I piani $ACC'A'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.
4. Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h . Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3}h(B + b + \sqrt{Bb}).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a,b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.
6. Dimostrare che si ha:

$$\frac{e^{n+1} - 1}{e - 1} = \frac{e^n - 1}{e - 1} + \frac{e^n - 1}{e - 1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:
 - a) area massima e perimetro massimo;
 - b) area massima e perimetro minimo;
 - c) area minima e perimetro massimo;
 - d) area minima e perimetro minimo.
 Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

A. S. 2000/2001
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA

8. Considerata la funzione:

$$f(x) = a x^3 + 2 a x^2 - 3 x ,$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9. Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,

- a) è uguale a 0;
- b) è uguale ad 1;
- c) è un valore diverso dai due precedenti;
- d) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10. Si consideri la funzione $\frac{x + \sin x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \rightarrow +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.