

**ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**  
**Scuole Italiane All'estero**  
**Sessione Ordinaria 2002**  
Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

**PROBLEMA 1**

Il triangolo ABC è rettangolo in A e i suoi cateti hanno misure note, una doppia dell'altra.

Condotta per A una retta r non secante il triangolo e detta B'C' la proiezione ortogonale dell'ipotenusa BC su r, si determini la posizione di r per cui l'area del trapezio B'BCC' è massima.

Si affronti il problema

- con i metodi della trigonometria (indicando, ad esempio, con x l'angolo che r forma con AC o AB);
- con i metodi della geometria analitica introducendo un conveniente sistema di riferimento cartesiano.

Si ritrovi, infine, il risultato a partire dall'osservazione che il trapezio è somma del triangolo dato e dei triangoli rettangoli, di ipotenuse costanti, B'BA e ACC'. Quand'è che ciascuno di questi ha area massima?

**PROBLEMA 2**

Uno specchio sferico di ampiezza  $20^\circ$  ha il volume, approssimato a meno di  $10^{-2}$ , uguale a  $169,65 \text{ cm}^3$ .

1. Si determini il raggio della sfera cui lo specchio appartiene;
2. Supposto che la sfera sia di ferro (peso specifico = 7,8) e pesi 21,65 kg si stabilisca se essa è piena o contiene al suo interno qualche cavità.
3. Si calcoli l'altezza del cono di volume minimo circoscritto alla sfera.

**QUESTIONARIO**

1. Cosa si intende per "funzione periodica"?

Quale è il periodo di  $f(x) = \cos \frac{\pi}{6} x + \frac{p}{4} \frac{\pi}{6} - 1$ ?

Quale quello di  $\cos \pi x$ ?

2. Se  $f(x) = 2^x$ , mostrare che

a)  $f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x)$

b)  $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$

3. Dopo aver spiegato il significato e il valore del numero  $e$  di Nepero, calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

4. Determinare il valore del parametro  $t$  che soddisfa l'equazione:

$$\int_0^t \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) dx$$

5. Trovare l'equazione di una curva sapendo che il suo coefficiente angolare nel punto  $(x, y)$  è  $x\sqrt{1+x^2}$  e passa per il punto  $(0, -2)$

6. Due angoli  $\alpha$  e  $\beta$  misurano rispettivamente  $\frac{\pi}{2}$  radianti e 539 gradi. Quale dei due è il maggiore? Quale è più grande,  $\sin \alpha$  o  $\sin \beta$ ?

7. Provare che esiste un numero reale  $a$  con  $1 < a < 2$  in cui si annulla la funzione:

$$f(x) = \operatorname{tg} x + \log x - x$$

ove  $\log x$  denota il logaritmo naturale di  $x$ .

8. Si stima che la popolazione mondiale aumenti dell'1,7% ogni anno. Indicata con  $P$  la popolazione mondiale attuale e con  $Q$  la popolazione stimata tra un anno, il legame tra  $P$  e  $Q$  è espresso da:

- a)  $Q = 1,0017P$
  - b)  $Q = 1,017P$
  - c)  $Q = 1,17P$
  - d)  $Q = 1,7P$
  - e) Nessuna delle risposte precedenti è esatta
- Dare una esauriente spiegazione della risposta.

Durata massima della prova : 6 ore

E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.