- E U R O P A -

ESAME DI STATO: Indirizzo **Scientifico**

Sessione ordinaria 2004

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:

PROBLEMA 1.

In un piano sono assegnati una retta r ed un punto H la cui distanza da r è $\frac{3}{2}$ rispetto ad una data unità di misura delle lunghezze.

a) Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare sulla retta r due punti A e B tali che il triangolo HAB sia equilatero e trovare l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo.

b) Determinare l'equazione in t che risolve la seguente questione: «Condurre, ad una distanza t dal punto H, la retta s parallela ad r in modo che intersechi la circonferenza e il triangolo suddetti e, indicate con PQ ed RS le corde che su tale retta s intercettano nell'ordine la circonferenza e il triangolo medesimi, risulti: $\overline{PQ} = k\,\overline{RS}$, dove k è un parametro reale assegnato».

c) Posto, nell'equazione trovata, t = X e k^2 = Y, esprimere Y in funzione di X e, prescindendo dalla questione geometrica, studiare la funzione Y = Y(X) così ottenuta e disegnarne l'andamento.

d) Utilizzando tale andamento, stabilire per quali valori di k si hanno valori di t che risolvono la questione di cui al punto b) e quanti sono questi valori di t.

PROBLEMA 2.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = a x^2 - \frac{3}{2} a x + \frac{1}{2x},$$

dove a è un parametro reale assegnato.

a) Dimostrare che esse passano tutte per uno stesso punto A.

b) Tra le curve assegnate determinare quella che presenta come tangente in A la retta di coefficiente angolare $\frac{23}{18}$.

c) Dopo aver controllato che la curva K trovata è quella che corrisponde al valore 1 di a, studiarla e disegnarne l'andamento.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva K e dalla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

QUESTIONARIO.

1. Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}$, calcolare, qualora esistano, i suoi limiti per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

2. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^{1/\sqrt{2}} f(x)\,dx$. È allora possibile calcolare il valore di:

   [A] $\int_0^{\sqrt{2}/4} f\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$; [B] $\int_0^{\sqrt{2}/2} f\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$; [C] $\int_0^{\sqrt{2}} f\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$; [D] $\int_0^{2\sqrt{2}} f\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

3. Dimostrare la formula che fornisce la somma di n numeri in progressione geometrica..

4. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un tetraedro regolare, misurata in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.

5. La retta r è perpendicolare nel vertice A al piano del quadrato ABCD. Indicato con E un qualsiasi punto di r, distinto da A, dimostrare che le facce laterali della piramide di vertice E e base ABCD sono triangoli rettangoli, a due a due congruenti.

6. Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle indeterminate x, y:

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{17}{4} \\ x^3 y^3 = 1 \end{cases}$$

   Ogni sua soluzione rappresenta le coordinate di un punto del piano cartesiano (Oxy). Calcolare quanti e quali punti rappresenta il sistema.

7. Una classe è formata da 30 alunni, fra i quali Aldo e il suo amico fidato Giacomo. Si deve formare una delegazione costituita da 4 studenti della classe. Calcolare quante sono le possibili quaterne comprendenti Aldo e Giacomo.

· Durata della prova: 6 ore.
· Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.
· È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.