(Estero – 1)

ESAME DI STATO: Indirizzo **Scientifico**
Sessione ordinaria 2006

SECONDA PROVA SCRITTA
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:

PROBLEMA 1.

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = a x^2 + \frac{b}{x},$$

dove a, b sono parametri reali.

a) Fra tali curve determinare quella che passa per i punti di coordinate $(2,3)$ e $(-2,5)$ e indicarla con γ.
b) Studiare la curva γ e disegnarne l'andamento, dopo aver trovato, in particolare, le coordinate del suo punto di minimo relativo e del suo flesso.
c) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva γ e dalla retta y=5.
d) Utilizzando il disegno di γ, trovare quante soluzioni ammette l'equazione $x^3 - kx - 2 = 0$, per -2<x<2, essendo k un parametro reale.

PROBLEMA 2.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola p' di equazione:

$$y = a x^2,$$

dove a è un numero reale positivo assegnato.

a) Condotta una generica retta t per il fuoco F della parabola p' e chiamato M il punto medio del segmento che p' intercetta su t, trovare le funzioni $x(k)$ ed $y(k)$ che forniscono, nell'ordine, l'ascissa e l'ordinata di M per mezzo della pendenza k della retta t.
b) Considerate le equazioni $x=x(k)$ e $y=y(k)$ ed eliminato il parametro k fra esse, si trova l'equazione di una seconda parabola p'' (*è chiamata luogo geometrico del punto M al variare di t nel fascio di centro F*).
c) Calcolare l'area A della regione piana R delimitata dalle parabole p' e p'' e dalle rette di equazioni $x=0$ ed $x=2a$.
d) Trovare il valore di a per il quale l'area A è uguale a $\frac{13}{24}$ e, in corrispondenza di tale valore, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse y.

QUESTIONARIO.

1. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x) = \text{sen}^2(2x)$.

2. Si consideri la seguente proposizione:
Condizione necessaria e sufficiente affinché due triangoli siano congruenti è che abbiano due lati congruenti e i seni degli angoli fra essi compresi uguali.
Dire se è vera o falsa e spiegare in modo esauriente la risposta data.

3. Si indichi con α l'angolo che una diagonale di un cubo forma con una faccia. La misura di α, espressa in radianti:

[A] è $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; [B] è $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$; [C] è $\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$; [D] un valore diverso.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4. Considerata l'equazione: $x^4 + x - 2 = 0$, spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione *razionale*.

5. In un cono equilatero di apotema a inscrivere il cilindro circolare retto di volume massimo.

6. La funzione reale di variabile reale f(x) ammette derivata nulla in tutti i punti di un intervallo J, tranne che nel punto a di J, dove la funzione non è continua. Si può concludere che la funzione f(x) è costante in J? Fornire una spiegazione esauriente della risposta.

7. Si consideri il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Esso è uguale a:

[A] e^2; [B] $\frac{1}{e^2}$; [C] $\sqrt{e}$; [D] $\frac{1}{\sqrt{e}}$,

dove "e" è il numero di Nepero.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

· Durata della prova: 6 ore.
· Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.
· È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.