



MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE

SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (AMERICHE)
ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria a.s. 2006/07
SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione f definita da $f(x) = 1 - x^2$, il cui grafico è la parabola Γ

- 1) Si trovi il luogo geometrico Λ dei centri (a, b) delle circonferenze che sono tangenti a Γ nel suo punto di ascissa 1.
- 2) Si calcoli l'area del dominio piano delimitato da Λ e Γ .
- 3) Si tracci il grafico della funzione $\frac{1}{f}$;
- 4) si considerino i due domini piani, ricadenti nel III e IV quadrante, delimitati dai grafici di f e di $\frac{1}{f}$ nella striscia $-1 \leq y \leq -2$ e se ne calcoli l'area.

PROBLEMA 2

Della parabola γ si sa che passa per i punti $A(0, 2)$ e $B(2, 0)$, ha l'asse parallelo all'asse y e volge la concavità nel verso negativo di tale asse; inoltre l'area del dominio piano delimitato da γ e dai segmenti OA e OB è $\frac{10}{3}$.

1. Si determini l'equazione di γ e se ne tracci il grafico.
2. La retta s di equazione $y = mx + 2$, dove m è un parametro reale, interseca γ in A e in C . Si esprimano in funzione di m le coordinate di C .
3. Si studi la funzione $f(m) = AC^2$ e se ne tracci il grafico λ .
4. Si dica quale posizione assume la retta s in corrispondenza dell'estremo relativo della curva λ .

QUESTIONARIO

1. Si dimostri che fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.
2. Quando due rette si dicono sghembe? Come si definisce la distanza tra due rette sghembe?
3. Si calcolino le radici dell'equazione: $3^{x+3} + 9^{x+1} = 10$
4. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di \mathbb{R} in \mathbb{R} :

$$f : x \rightarrow 3^{x+1}; \quad g : x \rightarrow 3^x + 1; \quad h : x \rightarrow 3^{|x|}; \quad k : x \rightarrow 3^{-x}$$

5. Siano a e b due numeri positivi diversi da 1. Si dimostri che:
$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$
6. Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione $f(x)$ è, in ogni suo punto P , uguale al quadruplo della radice cubica dell'ascissa di P . Si determini $f(x)$, sapendo che il grafico passa per il punto $A(-1, 0)$.
7. Un cerchio ha raggio 1 *metro*. Quanto misura il lato del decagono regolare in esso inscritto? E quale è la misura del lato del decagono regolare circoscritto?
8. Il valore della seguente espressione:

$$\int_0^1 \arccos x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2 \arcsen x) \, dx$$

è $\frac{\pi-1}{2}$. Spiegarlo in maniera esauriente.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.