

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE
Sessione ordinaria 2007

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è $AB=1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $\hat{C}AB$ si mantenga doppio dell'angolo $\hat{A}BC$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C .
2. Si rappresenti γ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $\hat{A}BC$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $\hat{A}BC = 36^\circ$ allora è $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio C di raggio r .

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C . Si dimostri che

$$S_n = \frac{n}{2} r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

lati circoscritto a C .

3. Si calcoli il limite di S_n per $n \rightarrow \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

QUESTIONARIO

1. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x , con $1 \leq x \leq e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani

- perpendicolari all'asse x , sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2} .
2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
 3. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1
 4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.
 5. Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio* (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo $[-2, 2]$. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.
 6. Si sa che il prezzo p di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
 7. Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo $[-2, 2]$, che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?
Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3 + f(x)$?
 8. **A Leonardo Eulero (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».**
 9. Si risolva l'equazione: $4 \binom{n}{4} = 15 \binom{n-2}{3}$
 10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.