MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (EUROPA)

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria a.s. 2007/08

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La circonferenza γ passa per B (0,-4) ed è tangente in O (0, 0) alla retta di coefficiente angolare –4; la parabola λ passa per A(4,0) ed è tangente in O a γ.

1. Si disegnino γ e λ e se ne determinino le rispettive equazioni cartesiane.
2. Sia α l'angolo sotto cui è visto il segmento OB da un punto dell'arco di γ appartenente al quarto quadrante. Si dia una misura di α approssimandola in gradi e primi sessagesimali.
3 Se P è un punto dell' arco di λ contenuto nel quarto quadrante e H la sua proiezione sull'asse x, si trovi la posizione di P affinché il triangolo OPH abbia area massima.
4 Si conducano le due rette tangenti a λ nei suoi punti O e A; si calcoli l'area del triangolo mistilineo delimitato dall'arco di parabola appartenente al quarto quadrante e dalle due tangenti.

PROBLEMA 2

Nell'insieme delle funzioni y = f (x) tali che

$$y' = \frac{ax}{\left(1+4x^2\right)^2}$$

si trovi quella il cui grafico γ passa per i punti $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e (0, 2).

1) Constatato che la funzione definita da: $y = \frac{2}{1+4x^2}$ è quella richiesta, si disegni γ.

2) Si conduca la tangente a γ in un suo generico punto P. Sia Q l'intersezione di tale tangente con l'asse x e H la proiezione ortogonale di P sull'asse x. Per quale valore di x è minima la lunghezza del segmento HQ ?

3) Si calcoli l'area della superficie piana delimitata da γ e dagli assi cartesiani.

QUESTIONARIO

1. La regione R delimitata dal grafico di $y = 7\sqrt[3]{x}$, dall'asse x e dalla retta x=2 è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte dei quadrati. Si calcoli il volume di S.
2. Le misure dei lati di un triangolo sono 12, 16 e 20 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
3. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - x^2 - 3k + 2 = 0$$
4. La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto di apotema *50cm*. Si dica quanti *litri* di vino la damigiana può contenere.
5. Si dimostri che l'equazione $x^7 + 5x + 5 = 0$ ha una sola radice reale.
6. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di R in R:
$$f : x \to 5^{x+1};\quad g : x \to 5^x + 1;\quad h : x \to 5^{|x|};\quad k : x \to 5^{-x}$$
7. Quale significato attribuisci al simbolo $\binom{n}{k}$? Esiste un k tale che $\binom{10}{k} = \binom{10}{k-2}$?
8. Dimostra che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica. Cioè $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.