ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Indirizzo: Piano Nazionale Informatica

CORSO SPERIMENTALE

Sessione suppletiva 2008

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a cinque quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

Siano dati un cerchio di raggio r ed una sua corda AB uguale al lato del quadrato in esso inscritto.

1. Detto P un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi A e B, si consideri il rapporto:
$$\frac{\overline{PA}^2+\overline{PB}^2}{\overline{AB}^2}$$
e lo si esprima in funzione di $x = tgP\hat{A}B$.
2. Si studi la funzione f(x) così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Detto C il punto d'intersezione della curva γ con il suo asintoto orizzontale, si scriva l'equazione della tangente a γ in C.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ, la suddetta tangente e la retta di equazione x = k, essendo k l'ascissa del punto di massimo relativo.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:
$$y = a\,\text{sen}^2x + b\,\text{sen}x + c$$

1. Si determinino a, b, c, in modo che il suo grafico γ passi per A(0,2), per B(π/6,0) ed abbia in B tangente parallela alla retta $3\sqrt{3}x+2y-5=0$.
2. Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.
3. Si calcoli il valore dell'area di ciascuna delle due parti di piano compresa fra la retta y=2 e la curva stessa.
4. Tra tutte le primitive della funzione data, si determini quella il cui grafico passa per P(0,6) e si scriva l'equazione della retta ad esso tangente in detto punto.

PNI

QUESTIONARIO

1. Si determinino le costanti a e b in modo tale che la funzione :

   $$f(x)=\begin{cases} ax+b & per\ \ x\le 0 \\ \dfrac{e^x-1}{x} & per\ x>0 \end{cases}$$

   risulti continua e derivabile nel punto x=0.

2. Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine λ = 23° 27' nord)?
3. Si determini il numero reale positivo λ in modo che la curva rappresentativa della funzione $g(x)=e^{-\lambda x}$ divida in parti equiestese la regione delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $f(x)=e^{\lambda x}$, dall'asse x e dalle rette x = 0 e x = 1.
4. Si determini la probabilità che, lanciando 8 volte una moneta non truccata, si ottenga 4 volte testa.
5. Si dimostri che l'equazione $(3-x)e^x-3=0$ per x>0 ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
6. Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.
7. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$ nell'intervallo $0\le x\le 1$
8. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani sono assegnati i punti A(0,1), B(0,4). Si determini sul semiasse positivo delle ascisse un punto C dal quale il segmento AB è visto con un angolo di massima ampiezza.
9. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

   $$f(x)=\int_1^{\sqrt{\log x}}\frac{e^t}{t^2}dt\ .$$

   nel punto P di ascissa x = e.
10. Tenuto conto che:

   $$\frac{\pi}{6}=\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

   si calcoli un'approssimazione di π, utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.