



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSI SPERIMENTALI

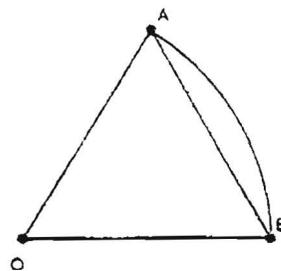
Tema di: MATEMATICA, MATEMATICA ED INFORMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti).

1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x , da $S(x) = \frac{1}{2}r^2(x - \text{sen } x)$ con $x \in [0, 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2 . Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W .



PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (logaritmo naturale)

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P . Sia B il punto d'intersezione con l'asse x della parallela per P all'asse y . Si dimostri che, qualsiasi sia P , il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45^\circ$? E per quale valore di a è $\delta = 135^\circ$?
3. Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di D .
4. Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSI SPERIMENTALI

Tema di: MATEMATICA, MATEMATICA ED INFORMATICA

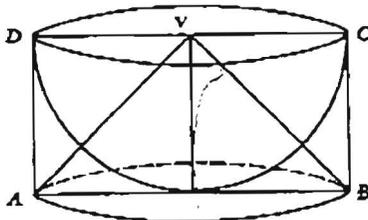
QUESTIONARIO

1. Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b, b]$. Si provi che: $\int_{-b}^b |x-a| dx = a^2 + b^2$.
2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili funzioni (o applicazioni) di A in B , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?
3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)
4. "Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni". Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0$$

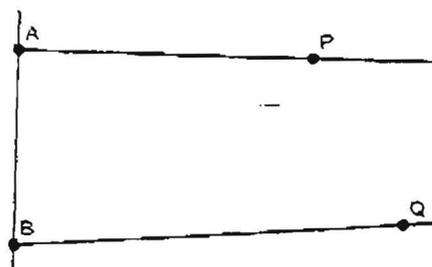
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\sin x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.
8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?
9. Nei "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze", Galileo Galilei descrive la



costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

10. "Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli $\hat{P}AB$ e $\hat{Q}BA$ hanno somma minore di 180° , allora le semirette AP e BQ , prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q , si devono intersecare". Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati



Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.