



**MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITA' E DELLA RICERCA
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (EUROPA)**

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy si consideri il quadrato $OABC$, dove $A = (1; 0)$ e $C = (0; 1)$.

1. Sia P un punto appartenente al lato AB . Si considerino le parabole, con asse parallelo all'asse y , passanti per O e per P e tangenti al lato BC . Quali sono i possibili vertici di tali parabole, al variare di P su AB ?
2. Tra quelle sopra indicate, si dimostri che la parabola Γ_1 , tale che il segmento parabolico limitato dalla corda OP abbia area pari alla metà del quadrato $OABC$, ha equazione:
 $y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x$.
3. Si determini l'equazione della parabola Γ_2 simmetrica di Γ_1 rispetto all'asse y e si calcoli l'area della regione piana delimitata dalle due parabole e dalla comune retta tangente nei loro vertici.
4. Sia r una retta di equazione $y = k$, con $k \in [0; 1]$ e siano Q e R i punti (più vicini all'asse y) in cui r taglia, rispettivamente, le parabole Γ_1 e Γ_2 . Si determini il valore di k per cui risulti massima l'area del triangolo QCR .

PROBLEMA 2

Una circonferenza di centro O e raggio 4 è tangente esternamente nel punto A ad un'altra circonferenza di raggio x minore di 4. Le tangenti comuni, non passanti per A , si incontrano in un punto B .

1. Si provi che, al variare di x , la distanza $f(x)$ di B da O è data da $f(x) = \frac{4x+16}{4-x}$; si disegni il grafico Γ di $f(x)$ prescindendo dai limiti posti ad x dal problema.
2. Sia P un punto di Γ . Si dimostri che la retta tangente a Γ in P incontra gli asintoti di Γ in due punti equidistanti da P . Si verifichi altresì che Γ ammette un centro di simmetria di cui si chiedono le coordinate.
3. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra Γ e gli assi coordinati.
4. Sia infine $g(x) = f(|x|)$. Quale il grafico di $g(x)$? Si determini, al variare di k il numero delle radici dell'equazione $g(x) = k$.

QUESTIONARIO

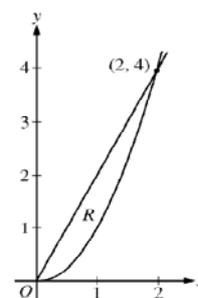
1. Si provi che se i lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione d allora il raggio della circonferenza inscritta è uguale a d .
2. Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fra il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ e l'asse x . Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W ?

A) $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x dx$; B) $\pi \int_0^1 (\operatorname{arcsen} x)^2 dx$; C) $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x dx$; D) nessuno di questi.

Si motivi la risposta

3. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, a base quadrata, di superficie totale a^2 quale è quello di volume massimo?
4. La curva di equazione $y = \sqrt{x \ln x}$ ammette punti con tangente parallela all'asse x ? Ammette punti con tangente parallela all'asse y ? In caso affermativo si determinino.
5. In una circonferenza di centro O e raggio r sono date due corde prive di punti comuni $AB = r$ e $CD = r\sqrt{3}$. Si dimostri che il quadrilatero $ABCD$ ha le diagonali perpendicolari.
6. Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t + \frac{1}{t}; t - \frac{1}{t}\right)$. Quale è l'equazione cartesiana del luogo descritto da P al variare di t ($t \neq 0$) ?
7. Si calcoli il valor medio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ nell'intervallo $[-1;1]$ e se ne indichi il significato geometrico

8. La regione R è delimitata da $y = 2x$ e $y = x^2$ come mostrato nella figura a lato. R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x , hanno area $A(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$. Si determini il volume di W .



Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.