

**M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO DI ORDINAMENTO

**Indirizzo:** SCIENTIFICO**Tema di:** MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

Data una semicirconferenza di diametro  $AB = 2$ , si prenda su di essa un punto  $P$  e sia  $M$  la proiezione di  $P$  sulla retta perpendicolare in  $B$  ad  $AB$ .

1. Si esprima la somma  $AP + PM$  in funzione di  $x = \widehat{PAB}$ .
2. Si studi la funzione  $f(x)$  così ottenuta e si tracci il suo grafico  $\gamma$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$ , mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si dimostri che  $\gamma$  è simmetrica rispetto alla retta  $x = \pi$ .
4. Si calcoli l'area della regione piana, limitata dalla curva  $\gamma$ , dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione  $x = \frac{\pi}{3}$ .

**PROBLEMA 2**

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ .
2. Si scrivano l'equazione della tangente a  $\gamma$  nel punto di flesso e quella della retta ad essa parallela, passante per il punto di  $\gamma$  avente ascissa  $\sqrt{3}$ ; si calcoli l'area del parallelogramma formato da queste due rette, dall'asse  $x$  e dall'asintoto orizzontale destro.
3. Si calcoli l'area della regione  $A_k$ , delimitata dalla curva  $\gamma$ , dall'asse  $y$ , dall'asintoto orizzontale destro e dalla retta  $x = k$  con  $k > 0$ . Si calcoli poi il limite di  $A_k$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .
4. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $x$  della porzione di piano limitata dalla curva  $\gamma$ , dalla tangente inflessionale e dalla retta  $x = 1$ .

**M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO DI ORDINAMENTO

**Indirizzo:** SCIENTIFICO**Tema di:** MATEMATICA**QUESTIONARIO**

1. Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di  $30^\circ$ . Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a  $20^\circ$ , con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

2. La funzione:

$$f(x) = \frac{1}{(e^{1/x} - 1)^2}$$

non è definita nel punto  $x = 0$ , che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della  $f(x)$  per  $x$  tendente a zero da sinistra e per  $x$  tendente a zero da destra.

3. La retta di equazione  $x = 8$  seca la parabola di equazione  $x = y^2 - 4y + 3$  nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di  $180^\circ$  intorno all'asse della parabola.

4. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = (3 \cos x + \sin^2 x - 3)^{\cos x}$$

Che cosa succederebbe se l'esponente fosse  $\sin x$ ?

5. Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .

6. Si dica se l'equazione:

$$2 \sin x + 2 \cos x = 3 + 2^x$$

ha soluzione.

7. Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali.

8. Si dimostri che la seguente proposizione è vera: "Se il grafico di una funzione razionale intera  $f(x)$  è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, allora il grafico della sua derivata  $f'(x)$  è simmetrico rispetto all'origine".

9. Si calcoli il limite della funzione  $\frac{e^{x^3} - 1}{x \sin^2 x}$  quando  $x$  tende a 0.

10. Data una circonferenza di centro O, si conducano negli estremi A e B di un suo diametro AB le tangenti e siano C e D i punti d'intersezione di esse con una terza tangente alla circonferenza. Si dimostri che l'angolo  $\widehat{COD}$  è retto.

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.