MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITA' E DELLA RICERCA
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (AMERICHE)

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO
Indirizzo: SCIENTIFICO
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

E' data la semicirconferenza Γ di centro C e diametro $AB = 2$. Sia t la semiretta tangente a Γ in B e giacente nello stesso semipiano di Γ rispetto ad AB.

1. Da un punto D di t, distinto da B, si conduca l'altra tangente a Γ e si indichi con E il punto di tangenza. Dal centro C si conduca una semiretta parallela a DE che tagli t in F. Si provi che il triangolo FDC è isoscele.
2. Posto $x = \overline{DB}$ e $y = \overline{DF}$ si provi che $y = \frac{x^2+1}{2x}$. Si determini l'intervallo in cui può variare x e, in corrispondenza, quello in cui varia y.
3. Si tracci il grafico Φ della $y = f(x)$, senza tener conto dei limiti posti dal problema geometrico, e si indichi con s il suo asintoto obliquo.
4. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della regione di piano delimitata da Φ, da s e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.

PROBLEMA 2

Sia R la regione del primo quadrante degli assi cartesiani delimitata da $y = \sqrt{x}$ e da $y = \frac{x}{4}$

1. Si determini la retta $y = k$ che dimezza l'area di R.
2. Si disegni la regione piana simmetrica di R rispetto alla retta $y = 4$, e si scrivano le equazioni delle curve che la delimitano.
3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione di R attorno alla retta $y = 4$
4. R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse y sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

QUESITI

1. Un trapezio è inscritto in un semicerchio di raggio 2 con una base coincidente con il diametro del cerchio. Si trovi l'area massima del trapezio.
2. In un libro si legge: "*La definizione classica di misura di un angolo per mezzo della lunghezza di un arco di cerchio è essenzialmente corretta*". Si spieghi, eventualmente con qualche esempio, il significato di tale affermazione.
3. Tommaso ha costruito un modello di tetraedro regolare e vuole colorare le 4 facce, ognuna con un colore diverso. In quanti modi può farlo se ha a disposizione 9 colori? E se invece si fosse trattato di un cubo?
4. Si provi che l'equazione $x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 1 = 0$ ammette nell'intervallo $[0, 1]$ un'unica soluzione.
5. Il volume di una sfera è pari ai 2 /3 del cilindro ad essa circoscritto. E' questo uno dei risultati più noti che si attribuisce ad Archimede tant'è che una sfera e un cilindro furono scolpiti sulla sua tomba. Si ritrovi tale risultato mediante l'applicazione del calcolo integrale.
6. Un cono rotondo ha altezza $h = 7dm$ e raggio $r = 4dm$. Si vuole diminuire la prima di quanto si aumenta il secondo in modo che il volume del cono aumenti del 25 %. Si dica se la questione ammette soluzioni e, in caso affermativo, si dica quali sono.
7. Data la funzione definita da:
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & se\ x < 2 \\ bx + c & se\ x \geq 2 \end{cases}$$
Si determini la terna ordinata (a, b, c) in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:
a) $f\ (x)$ è continua
b) $f\ (3)\ =\ 20$
c) $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$
8. Si verifichi l'identità: $tg(45° + \alpha) = \frac{1+sen2\alpha}{cos2\alpha}$

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.