Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La curva γ è rappresentata dalle seguenti equazioni parametriche:

$$x = \frac{t+1}{t}, \quad y = \frac{t^2+1}{t}$$

1. Se ne ricavi l'equazione cartesiana $y = f(x)$ e se ne costruisca il grafico.
2. Si scriva l'equazione della retta s che congiunge i punti estremanti relativi di γ e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo acuto Φ che tale retta forma con l'asintoto obliquo.
3. Si calcoli l'area della regione di piano Σ, delimitata da γ, dal suo asintoto obliquo e dalle rette $x = 2$ e $x = 4$.
4. Verificato che è $A(\Sigma) = \log 3$, si calcoli un'approssimazione di $\log 3$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si dimostri che l'equazione

   $$x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0$$

   ha, sull'intervallo $1 < x < 2$, un'unica radice reale ξ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

   Dopo aver constatato che ξ altro non è che l'ascissa del punto di flesso della curva γ, si calcoli il valore approssimato dell'ordinata.
3. Si scrivano le equazioni della tangente e della normale a γ nel punto di intersezione con l'asse x e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse y.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 2$.

Sessione suppletiva 2014
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}$.

2. La funzione:

$$f(x) = sen\sqrt[3]{x},$$

è evidentemente continua nel punto $x = 0$. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.

3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{3}\left(2 + sen^2\frac{1}{x}\right)$$

nel punto P di ascissa $x = \frac{1}{\pi}$.

4. Data la parte finita di piano compresa tra le rette $x + y - 1 = 0$ e $x - 1 = 0$ ed il grafico della funzione $y = e^x$, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.

5. Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di 42,4° e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di 46,5°. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.

6. Si disegni il grafico γ della funzione:

$$f(x) = \text{distanza di } x \text{ dal più prossimo intero.}$$

Si dica se $f(x)$ è una funzione periodica e si calcoli l'area della regione di piano delimitata da γ, dall'asse x e dalla retta $x = \frac{9}{10}$ nell'intervallo $\left[0, \frac{9}{10}\right]$.

7. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana delimitata dalla curva γ di equazione

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ e dall'asse delle x nell'intervallo $-1 \le x \le 1$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

8. Si consideri l'equazione

$$\log|x| - e^x = 0.$$

   Si dimostri che essa ammette una soluzione reale appartenente all'intervallo $-2 \le x \le -1$ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

9. Un mazzo di "tarocchi" è costituito da 78 carte: 22 carte figurate, dette "Arcani maggiori", 14 carte di bastoni, 14 di coppe, 14 di spade e 14 di denari. Estraendo a caso da tale mazzo, l'una dopo l'altra con reinserimento, 4 carte, qual è la probabilità che almeno una di esse sia un "Arcano maggiore"?

10. Nel poscritto al suo racconto *"Il Mistero di Marie Rogêt"*, Edgar Allan Poe sostiene che, "avendo un giocatore di dadi fatto doppio sei per due volte consecutive, vi è una ragione sufficiente per scommettere che gli stessi sei non usciranno ad un terzo tentativo". Ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sono dati un quarto di cerchio AOB e la tangente t ad esso in A. Dal punto O si mandi una semiretta che intersechi l'arco AB e la tangente t, rispettivamente, in M ed N.

1. Posto $A\hat{O}M = a$, si calcoli il rapporto:

$$\frac{MN}{MA}$$

   e lo si esprima in funzione di $x = sen\frac{\alpha}{2}$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x}{1-2x^2}$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso; si scriva poi l'equazione della circonferenza con il centro nel suddetto punto di flesso e tangente agli asintoti verticali di γ.
4. Si determini l'area della regione di piano limitata dalla curva γ dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = \frac{1}{3}$ e $x = \frac{1}{2}$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x\log^2 x}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x = e$ e si calcoli l'area del trapezio T che essa forma con l'asse x, con l'asintoto verticale e con la retta di equazione $x = e$.
3. Si calcoli l'area della regione S_k delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = e$ e $x = k$ $(k > e)$.
4. Si faccia vedere che S_k tende verso un limite finito quando k tende a $+\infty$ e si confronti tale limite col valore numerico dell'area del trapezio T, arrotondato alla quarta cifra decimale.

Sessione suppletiva 2014
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^{x} + 2}$.
2. La funzione:
$$f(x) = sen\sqrt[3]{x},$$
è evidentemente continua nel punto $x = 0$. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.
3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = \frac{x^2}{3}\left(2 + sen^2\frac{1}{x}\right)$$
nel punto P di ascissa $x = \frac{1}{\pi}$.
4. Data la parte finita di piano compresa tra le rette $x + y - 1 = 0$ e $x - 1 = 0$ ed il grafico della funzione $y = e^{x}$, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.
5. Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di 42,4° e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di 46,5°. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.
6. Si trovino gli eventuali flessi della curva:
$$f(x) = x\left[(\log 3x)^2 - 2\log 3x + 2\right].$$
7. Una scatola di forma cilindrica ha raggio r e altezza h. Se si aumenta del 5% ciascuna sua dimensione, di quanto aumenterà, in termini percentuali, il suo volume?
8. Si calcoli il limite della funzione $\frac{senx + \cos x - \sqrt{2}}{\log sen2x}$, quando x tende a $\frac{\pi}{4}$.
9. Si calcoli il valore medio della funzione:
$$y = \cos^5 x,$$
nell'intervallo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.
10. Un certo numero formato da tre cifre è uguale a 56 volte la somma delle cifre che lo compongono. La cifra delle unità è uguale a quella delle decine aumentata di 4, mentre, scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, si ottiene un valore che è uguale a quello originario diminuito di 99. Si determini il numero di partenza.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.