Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

   Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

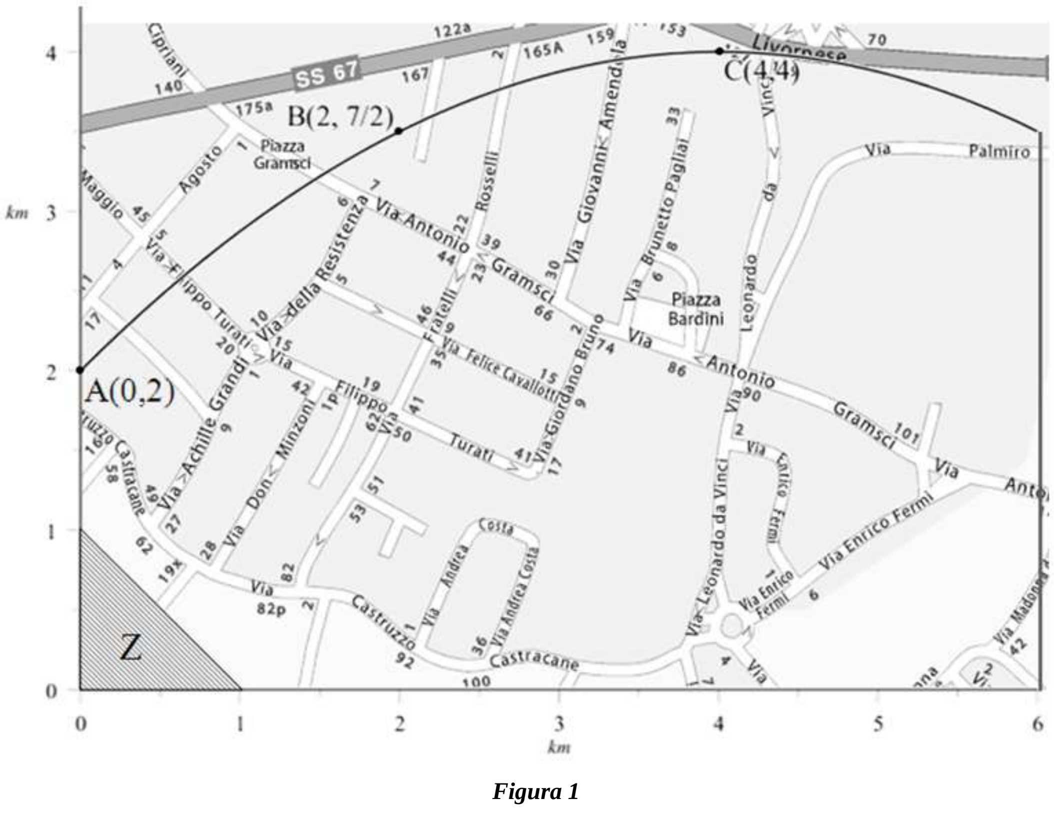


Figura 1

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti *A*, *B* e *C*, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti *A*, *B* e *C*. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "*nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio*"; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

PROBLEMA 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 2. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni *A*, *B*, *C* e *D* sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

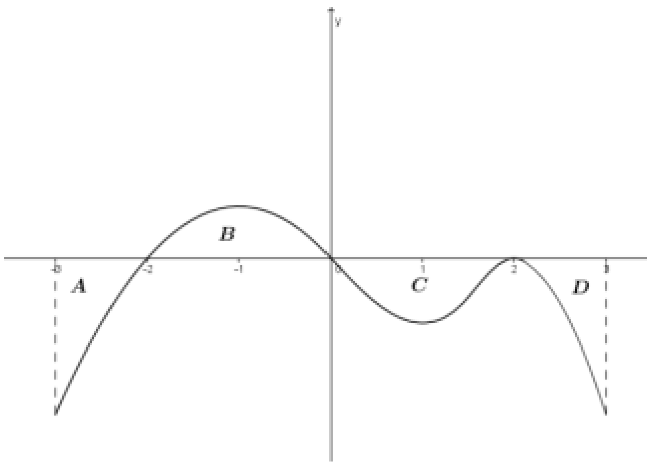


Figura 2

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di *x* per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.

4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

QUESTIONARIO

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di *f* nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.

2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove *R* ed *r* sono i raggi e *h* l'altezza.

3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

4. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + x \cdot y'' = 1$$

$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$$

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

6. Sia *f* la funzione, definita per tutti gli *x* reali, da

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$

determinare il minimo di *f*.

7. Detta *A(n)* l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in un cerchio *C* di raggio *r*, verificare che $A(n) = \frac{n}{2} r^2 sen \frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.

8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?

9. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

determinare il parametro *k* in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \Re, x \ge 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici *A* (1, 0), *B* (4, 0), *C* (4, 2) e *D* (1, 2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione suppletiva 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sei stato incaricato di progettare una pista da ballo all'esterno di un locale in costruzione in una zona balneare. Il progetto prevede, oltre alla pista, delle zone verdi e una tettoia che consenta l'uso della pista anche in caso di pioggia.

La pista da ballo viene rappresentata, in un sistema di riferimento cartesiano *Oxy* in cui l'unità di misura corrisponde a 1 metro, all'interno del rettangolo avente come vertici i punti di coordinate (-4, 0), (4, 0), (-4, 25) e (4, 25); nella scelta della sagoma della pista va rispettato il vincolo urbanistico che stabilisce che essa non può occupare più del 60% della superficie di tale rettangolo.

Un tuo collaboratore predispone due soluzioni: la prima è rappresentata dalla parte di piano compresa tra l'asse x e la curva di equazione, $y = -\frac{25}{16}x^2 + 25$, $x \in [-4, 4]$, la seconda dalla parte di piano compresa tra l'asse x, la curva di equazione $y = \frac{100}{4+x^2}$ e le rette $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$.

1. Studia le due soluzioni, e traccia il grafico di entrambe nel riferimento cartesiano *Oxy*. Individua in particolare le caratteristiche delle due funzioni che sono più rilevanti nella fase di costruzione della pista: eventuali punti di massimo e di minimo, di flesso, angolosi.

Il proprietario del locale sceglie la seconda soluzione, che ritiene più elegante, ma ti chiede di realizzare due aiuole nelle porzioni di terreno comprese tra le due curve che gli hai proposto.

2. Determina l'area della soluzione scelta e verifica che essa rispetti i vincoli urbanistici, in modo da poter poi procedere all'acquisto del materiale necessario per la costruzione della pista.

Poiché lo scavo effettuato ai lati della pista ha reso il terreno scosceso, hai fatto eseguire delle misure e hai verificato che sia per $x \in \left[-2\sqrt{3}, 0\right]$ che per $x \in \left[0, 2\sqrt{3}\right]$ la profondità dello scavo stesso varia con la legge lineare rappresentata dalla funzione $f(x) = |x| + 1$; è dunque necessario acquistare del terreno per riempire lo scavo e realizzare le aiuole richieste.

3. Calcola quanti metri cubi di terreno vegetale sono necessari per riempire l'aiuola delimitata dalle suddette curve nell'intervallo $\left[-2\sqrt{3}, 0\right]$.

Per realizzare la tettoia, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia. Nel sistema di riferimento cartesiano *Oxyz*, tale piano deve passare per i punti (-4, 0, 5), (4, 0, 5) e (0, 25, 4), in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza dell'inizio della pista, ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.

4. Determina l'equazione del piano prescelto.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

La rotazione intorno all'asse x dei grafici della famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} \quad con\ \ x \in \Re, \qquad 0 \leq x \leq k^2, \qquad k \in \Re, \qquad k > 0$$

genera dei solidi di rotazione di forma aerodinamica.

1. In un riferimento cartesiano *Oxy*, traccia i grafici delle funzioni $f_k(x)$, per $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e determina il valore di k per il quale il volume del solido di rotazione assume il valore $\frac{64\pi}{192}$;
2. calcola il diametro massimo dei solidi di rotazione in funzione di k, e determina il valore dell'angolo formato dalla tangente al grafico di f_k con l'asse x per $x = 0$;
3. assumendo che la distribuzione della massa sia omogenea, il baricentro del corpo di rotazione si trova sull'asse x, per ragioni di simmetria. Determina l'ascissa x_s del baricentro in funzione del parametro k, sapendo che vale:

$$x_s = \frac{\pi \int_a^b x[f_k(x)]^2 dx}{V}$$

   dove gli estremi di integrazione *a* e *b* vanno scelti opportunamente, e *V* indica il volume del solido di rotazione;
4. all'interno del solido di rotazione generato da f_k, per $k = 3$, si vorrebbe collocare un cilindro di raggio 0,5 e di altezza 6. Verifica se ciò è possibile, motivando la tua risposta.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Data la funzione integrale $\int_1^x ln(t)\,dt$, determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.
2. Data la famiglia di funzioni $y = -x^3 + 6kx + 33$ trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.
3. Vengono lanciati due dadi. Dei due punteggi, viene considerato il maggiore; se sono uguali, viene considerato il punteggio comune dei due dadi. Detto *X* il punteggio registrato, riportare in una tabella la distribuzione di probabilità di *X* e mostrare che $p(X = 3) = \frac{5}{36}$. Calcolare inoltre la media e la varianza di *X*.
4. In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio *Oxyz* sono dati i punti *A* (−3, 4, 0) e *C* (−2, 1, 2). I tre punti *O*, *A* e *C* giacciono su un piano *E*. Determinare l'equazione che descrive il piano *E*.
5. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 2$ della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y^2 = 8x$ e dalla retta stessa.
6. Preso un punto *C* su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia *M* il punto medio dell'arco *BC*. Determinare il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero *ABMC*.
7. Una fabbrica produce mediamente il 3% di prodotti difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi, usando:
   - la distribuzione binomiale;
   - la distribuzione di Poisson.
8. Provare che la funzione $y = e^x - tgx$ ha infiniti zeri, mentre la funzione $y = e^x - arctgx$ non ne ha alcuno.
9. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot e^x$, adoperando la definizione di derivata.
10. Sia la derivata seconda di una funzione reale $f(x)$ data da $f''(x) = 3x - 6$. Determinare l'espressione di $f(x)$, sapendo che il grafico della funzione passa per il punto *P* (2, −7) e che l'angolo formato dalla tangente al grafico di $f(x)$ con l'asse y nel punto di ascissa *x* = 0 vale 45°.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 1. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

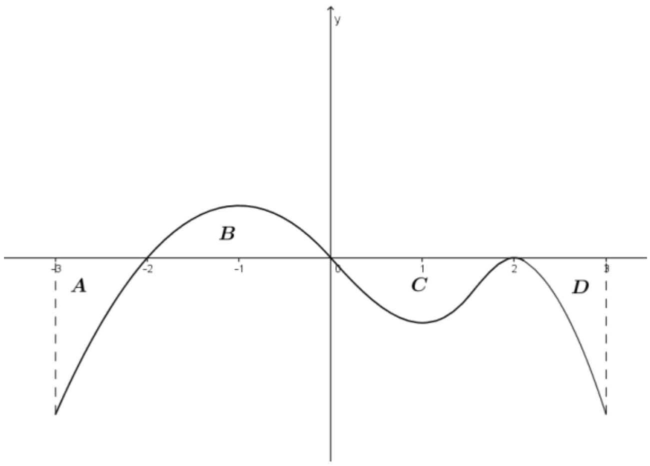


Figura 1

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

Assegnate le funzioni reali $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^{x-2}$, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano *Oxy*:

1. stabilisci dominio e codominio delle funzioni f e g, e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni $a(x) = f(g(x))$ e $b(x) = g(f(x))$;
2. determina l'equazione della retta r, tangente a F nel suo punto di ascissa e^2. Stabilisci inoltre se esiste una retta s, parallela a r, che sia tangente a G;
3. determina l'equazione della retta t, parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a F. Dimostra che t risulta essere tangente anche a G;
4. detta A la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G, calcola l'area di A e il volume del solido generato ruotando A intorno all'asse y.

Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di *f* nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.
2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula,
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$
dove *R* ed *r* sono i raggi e *h* l'altezza.
3. Risolvere l'equazione: $5\binom{n+1}{5} = 21\binom{n-1}{4}$.
4. Un solido ha per base la regione *R* del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2+1}$ e l'asse delle *x* nell'intervallo [0, 3]. Per ogni punto *P* di *R*, di ascissa *x*, l'intersezione del solido col piano passante per *P* e ortogonale all'asse delle *x* è un rettangolo di altezza 3*x*. Calcolare il volume del solido.
5. Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2}\right)$.
6. Sia *f* la funzione, definita per tutti gli *x* reali, da
$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$
determinare il minimo di *f*.
7. Detta *A(n)* l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in un cerchio *C* di raggio *r*, verificare che $A(n) = \frac{n}{2}r^2 sen\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.
8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
9. Data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$
determinare il parametro *k* in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.
10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \Re, x \ge 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici *A* (1, 0), *B* (4, 0), *C* (4, 2) e *D* (1, 2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Stai seguendo un corso, nell'ambito dell'orientamento universitario, per la preparazione agli studi di Medicina. Il docente introduce la lezione dicendo che un medico ben preparato deve disporre di conoscenze, anche matematiche, che permettano di costruire modelli ed interpretare i dati che definiscono lo stato di salute e la situazione clinica dei pazienti. Al tuo gruppo di lavoro viene assegnato il compito di preparare una lezione sul tema: "come varia nel tempo la concentrazione di un farmaco nel sangue?".

Se il farmaco viene somministrato per via endovenosa, si ipotizza per semplicità che la concentrazione del farmaco nel sangue raggiunga subito il valore massimo e che immediatamente inizi a diminuire, in modo proporzionale alla concentrazione stessa; nel caso che il docente ti ha chiesto di discutere, per ogni ora che passa la concentrazione diminuisce di 1/7 del valore che aveva nell'ora precedente.

1. Individua la funzione $y(t)$ che presenta l'andamento richiesto, ipotizzando una concentrazione iniziale $y(0) = 1\,\frac{\mu g}{ml}$ (microgrammi a millilitro) e rappresentala graficamente in un piano cartesiano avente in ascisse il tempo *t* espresso in ore e in ordinate la concentrazione espressa in $\frac{\mu g}{ml}$.

Se invece la somministrazione avviene per via intramuscolare, il farmaco viene dapprima iniettato nel muscolo e progressivamente passa nel sangue. Si ipotizza pertanto che la sua concentrazione nel sangue aumenti per un certo tempo, raggiunga un massimo e poi inizi a diminuire con un andamento simile a quello riscontrato nel caso della somministrazione per via endovenosa.

2. Scegli tra le seguenti funzioni quella che ritieni più adatta per rappresentare l'andamento descritto per il caso della somministrazione per via intramuscolare, giustificando la tua scelta:

$$y(t) = 1 - \frac{(t-4)^2}{16}$$

$$y(t) = sen(3t) \cdot e^{-t}$$

$$y(t) = -t^3 + 3t^2 + t$$

$$y(t) = \frac{7}{2}\left(e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t}{5}}\right)$$

3. Traccia il grafico della funzione scelta in un piano cartesiano avente in ascisse il tempo *t* espresso in ore e in ordinate la concentrazione *y* espressa in $\frac{\mu g}{ml}$ e descrivi le sue caratteristiche principali, in rapporto al grafico della funzione relativa alla somministrazione per via endovenosa.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Per evitare danni agli organi nei quali il farmaco si accumula è necessario tenere sotto controllo la concentrazione del farmaco nel sangue. Supponendo che in un organo il farmaco si accumuli con una velocità v, espressa in $\frac{\mu g}{ml \cdot h}$ (microgrammi a millilitro all'ora), proporzionale alla sua concentrazione nel sangue:

$$v(t) = k \cdot y(t)$$

4. Determina la quantità totale di farmaco accumulata nell'organo nel caso della somministrazione endovenosa e di quella intramuscolare studiate in precedenza. In quale delle due l'accumulo sarà maggiore?

PROBLEMA 2.

Sia f la funzione definita da $f(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$.

1. Dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso. Calcola le coordinate del minimo e del flesso e traccia il grafico G_f della funzione;
2. Dimostra che la funzione $g(x) = (-4x - 2) \cdot e^{-2x}$ è simmetrica a f rispetto all'asse y e tracciarne il grafico G_g;
3. Detti P e Q i punti di intersezione rispettivamente del grafico G_f e del grafico G_g con l'asse x, determina l'area A della porzione di piano delimitata dal segmento PQ e dai grafici G_f e G_g;
4. Sia f_a la famiglia di funzioni definite da $f_a(x) = (2ax - 2) \cdot e^{ax}$,con $a \in \Re - \{0\}$. Per ogni funzione f_a la tangente al grafico nel punto di flesso interseca l'asse x e l'asse y delimitando un triangolo rettangolo. Determina i valori di a per i quali tale triangolo è anche isoscele, spiegando il procedimento seguito.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y = 3$ della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x^3 - 3x + 3$ e dalla retta stessa.
2. Verificare che la funzione:
$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$
ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione:
$$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$
ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").
3. Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:
   a) qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?
   b) descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.
4. Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione:
   α) $x - 3y + z - 5 = 0$
   β) $x + 2y - z + 3 = 0$
   Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta *r* da essi individuata verificare che essa appartiene al piano γ di equazione $3x + y - z + 1 = 0$.
5. Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.
6. Determinare la funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo [2, 5] con una distribuzione uniforme. Determinare inoltre il valore medio, la varianza, la deviazione standard di tale variabile e la probabilità che sia $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{17}{4}$.
7. Calcolare il valor medio della funzione
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & 1 \leq x \leq 3 \\ e^{x-3} + 1 & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

nell'intervallo [1, 6] e determinare il valore della x in cui la funzione assume il valore medio.

8. Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione $r(t)$. Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.

9. In un riferimento cartesiano nello spazio *Oxyz*, data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano P di equazione:

$x + 2y - z + 2 = 0,$

determinare per quale valore di k la retta r e il piano P sono paralleli, e la distanza tra di essi.

10. Scrivere l'equazione della circonferenza C che ha il centro sull'asse y ed è tangente al grafico G_f di $f(x) = x^3 - 3x^2$ nel suo punto di flesso.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sei il responsabile del controllo della navigazione della nave indicata in figura 1 con il punto P. Nel sistema di riferimento cartesiano *Oxy* le posizioni della nave P, misurate negli istanti $t = 0$ e $t = 10$ (il tempo t è misurato in minuti, le coordinate x e y sono espresse in miglia nautiche), sono date dai punti $P_1(14, 13)$ e $P_2\ (12, 11)$. Negli stessi istanti la posizione di una seconda nave Q è data dai punti $Q_1(12, -2)$ e $Q_2(11, -1)$. Entrambe le navi si muovono in linea retta e con velocità costante, come rappresentato in Figura 1 (non in scala).

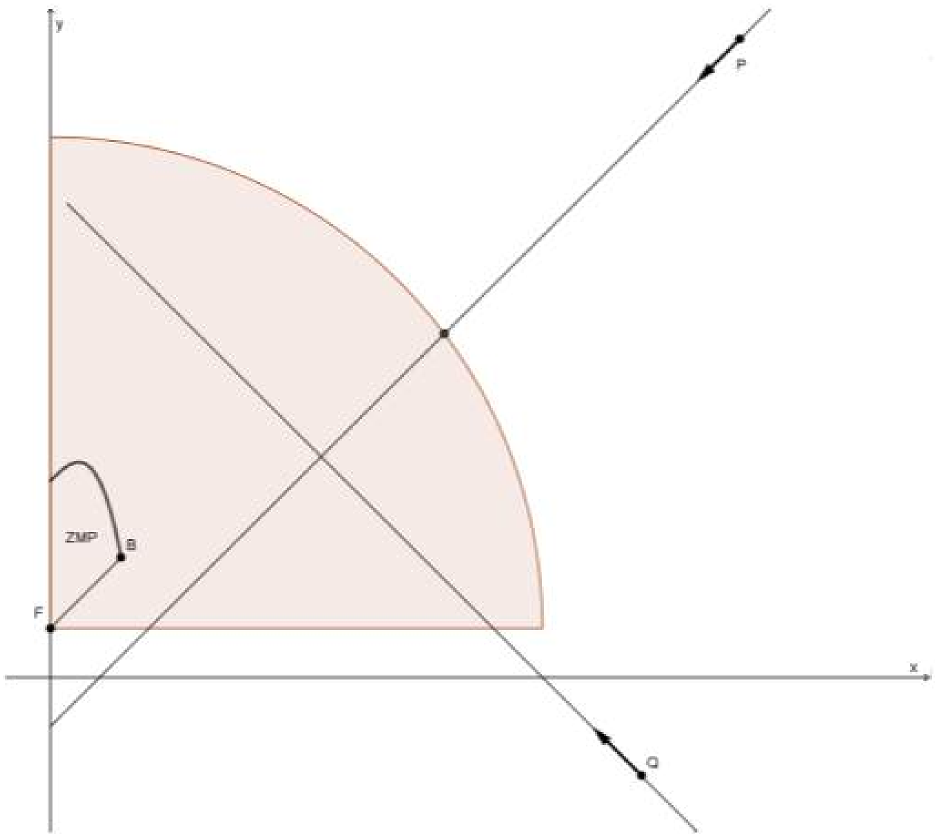


Figura 1

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

L'area indicata con ZMP è una "Zona Marittima Pericolosa". Il raggio luminoso di un faro posto nel punto *F* di coordinate (0, 1) spazza un quarto di un cerchio di raggio 10 miglia (vedi Figura 1).

1. Calcola dopo quanto tempo, rispetto all'istante in cui la nave *P* avvista per la prima volta il faro *F*, essa raggiunge la minima distanza dal faro, e la misura di tale distanza.
2. Determina la posizione della nave *P* nell'istante in cui per la prima volta la sua distanza dalla nave Q è pari a 9 miglia.
3. Determina l'istante *t* nel quale la distanza tra le due navi è minima e calcola il valore di tale distanza.

   Nel punto $B(X_B, Y_B)$ si trova una boa che segnala l'inizio della ZMP. La delimitazione della ZMP può essere descritta dai grafici delle funzioni *f* e g che si intersecano nel punto *B* e sono definite da:

   $$f(x) = -x^3 + x + 4, \quad x \in \Re, \;\; 0 \leq x \leq x_B$$
   $$g(x) = x + 1, \qquad x \in \Re, \qquad 0 \leq x \leq x_B$$

   e dalla retta $x = 0$.
4. Calcola l'area della ZMP.

PROBLEMA 2

Sia data la famiglia di funzioni $f(x) = \ln(\frac{a-x}{x^2+4}) + bx$.

1. Determina per quale valore di a e b il grafico della funzione passa per l'origine e ha un massimo nel punto di ascissa 2;
2. trovata l'espressione analitica della funzione, dopo aver definito il campo di esistenza, determina le equazioni degli eventuali asintoti;
3. determina l'area della regione piana delimitata dalla retta tangente alla curva nell'origine, dalla curva stessa e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse *y*;
4. calcola infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse *x* della parte di piano delimitata dalla tangente in *O*, dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse *y*.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

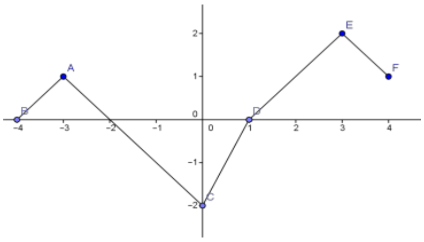
M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO



1. La funzione $f(x)$ è continua per $x \epsilon [-4, 4]$ il suo grafico è la spezzata passante per i punti:
   (-4, 0), (-3, 1), (-2, 0), (0, -2), (1, 0), (3, 2), (4, 1).
   Qual è il valor medio di $f(x)$ per $x \epsilon [-4, 4]$?
2. Da un'analisi di mercato è risultato che il 32% della popolazione usa il prodotto A. Scelto a caso un gruppo di 12 persone, determinare il valore medio, la varianza e la deviazione standard della variabile casuale *X* = «numero di persone che usa il prodotto A». Calcolare inoltre la probabilità che, all'interno del gruppo scelto, il numero di persone che usano detto prodotto sia compreso tra 2 e 5, estremi inclusi.
3. In un riferimento cartesiano *Oxyz*, si verifichi che la circonferenza γ, intersezione della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e del piano $z = 1$ ha centro in (0, 0, 1) e raggio $\sqrt{3}$. Si immagini che una sorgente di luce puntiforme *S* sia situata sul semiasse positivo delle z. A quale distanza dal centro della sfera si deve trovare *S* affinchè γ sia il confine tra la zona della sfera che risulta illuminata e quella che resta in ombra?
4. Sia $P(x) = x^2 + bx + c$. Si suppone che $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ e che $P(1) \neq P(2)$. Calcolare $P(0)$.
5. Risolvere l'integrale improprio: $\int_0^1 \ln(x)\, dx$.
6. La popolazione di una colonia di batteri è di 4000 batteri al tempo $t = 0$ e di 6500 al tempo $t = 3$. Si suppone che la crescita della popolazione sia esponenziale, rappresentabile, cioè, con l'equazione differenziale $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$, dove k è una costante e y la popolazione di batteri al tempo *t*. Al tempo $t = 10$, la popolazione supererà i 20000 batteri?
7. Una particella si muove lungo una certa curva secondo le seguenti leggi:
   $$x(t) = 3 - 2 \cdot \cos(t), \quad y(t) = 2 + 3 \cdot \mathrm{sen}(t).$$
   Disegnare la traiettoria percorsa dalla particella per *t* che va da 0 a 2π secondi e determinare la velocità di variazione di θ, l'angolo formato dalla tangente alla traiettoria con l'asse *x*, per $t = \frac{2}{3}\pi$ secondi.
8. Se $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{1+\ln(t)}\, dt$ per $x \geq 1$, qual è il valore di $f'(2)$?
9. Risolvere il seguente problema posto nel 1547 da Ludovico Ferrari a Niccolò Tartaglia:
   "Si divida il numero 8 in 2 numeri reali non negativi in modo che sia massimo il prodotto di uno per l'altro e per la loro differenza".
10. Trovare l'equazione della retta perpendicolare al grafico di $f(x) = 4x^3 - 7x^2$ nel punto di ascissa 3.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02Y – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: LIC2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE CINESE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 1. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

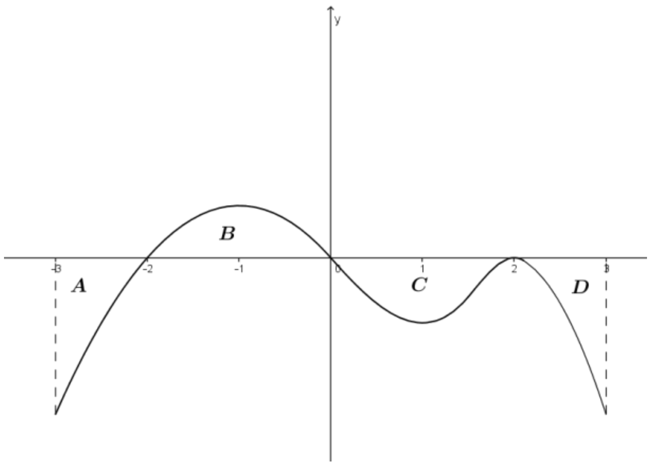


Figura 1

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02Y – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: LIC2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE CINESE

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

Assegnate le funzioni reali $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^{x-2}$, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano *Oxy*:

1. stabilisci dominio e codominio delle funzioni f e g, e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni $a(x) = f(g(x))$ e $b(x) = g(f(x))$;
2. determina l'equazione della retta r, tangente a F nel suo punto di ascissa e^2. Stabilisci inoltre se esiste una retta s, parallela a r, che sia tangente a *G*;
3. determina l'equazione della retta t, parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a *F*. Dimostra che t risulta essere tangente anche a *G*;
4. detta *A* la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dal grafico *G*, calcola l'area di *A* e il volume del solido generato ruotando *A* intorno all'asse y.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02Y – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: LIC2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE CINESE

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di *f* nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.
2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula,
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$
dove *R* ed *r* sono i raggi e *h* l'altezza.
3. Risolvere l'equazione: $5\binom{n+1}{5} = 21\binom{n-1}{4}$.
4. Un solido ha per base la regione *R* del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2+1}$ e l'asse delle *x* nell'intervallo [0, 3]. Per ogni punto *P* di *R*, di ascissa *x*, l'intersezione del solido col piano passante per *P* e ortogonale all'asse delle *x* è un rettangolo di altezza 3*x*. Calcolare il volume del solido.
5. Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2}\right)$.
6. Sia *f* la funzione, definita per tutti gli *x* reali, da
$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$
determinare il minimo di *f*.
7. Detta *A(n)* l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in un cerchio *C* di raggio *r*, verificare che $A(n) = \frac{n}{2} r^2 sen\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.
8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
9. Data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$
determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.
10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \Re, x \ge 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici *A* (1, 0), *B* (4, 0), *C* (4, 2) e *D* (1, 2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02Z – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LIB2 – SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE TEDESCA
EA10 - ESABAC - SCIENTIFICO INTERNAZIONALE FRANCESE

Tema di: MATEMATICA, MATEMATICA E INFORMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 1. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

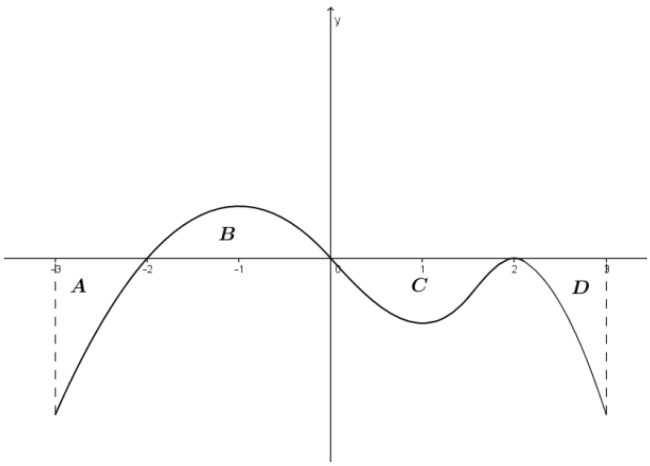


Figura 1

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02Z – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LIB2 – SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE TEDESCA
EA10 - ESABAC - SCIENTIFICO INTERNAZIONALE FRANCESE

Tema di: MATEMATICA, MATEMATICA E INFORMATICA

PROBLEMA 2

Assegnate le funzioni reali $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^{x-2}$, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano Oxy:

1. stabilisci dominio e codominio delle funzioni f e g, e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni $a(x) = f(g(x))$ e $b(x) = g(f(x))$;
2. determina l'equazione della retta r, tangente a F nel suo punto di ascissa e^2. Stabilisci inoltre se esiste una retta s, parallela a r, che sia tangente a G;
3. determina l'equazione della retta t, parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a F. Dimostra che t risulta essere tangente anche a G;
4. detta A la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G, calcola l'area di A e il volume del solido generato ruotando A intorno all'asse y.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02Z – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LIB2 – SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE TEDESCA
EA10 - ESABAC - SCIENTIFICO INTERNAZIONALE FRANCESE

Tema di: MATEMATICA, MATEMATICA E INFORMATICA

QUESTIONARIO

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di *f* nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.
2. Risolvere l'equazione: $5\binom{n+1}{5} = 21\binom{n-1}{4}$.
3. Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2}\right)$.
4. Sia *f* la funzione, definita per tutti gli *x* reali, da
$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$$
determinare il minimo di *f*.
5. Detta *A(n)* l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in un cerchio *C* di raggio *r*, verificare che $A(n) = \frac{n}{2} r^2 sen\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.
6. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
7. Data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$
determinare il parametro *k* in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.
8. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \Re, x \ge 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici *A* (1, 0), *B* (4, 0), *C* (4, 2) e *D* (1, 2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02X – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: IA48 – SCIENTIFICO INTERNAZIONALE - OPZIONE ITALO-INGLESE
LIA2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE SPAGNOLA

Tema di: MATEMATICA, MATEMATICA E INFORMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 1. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

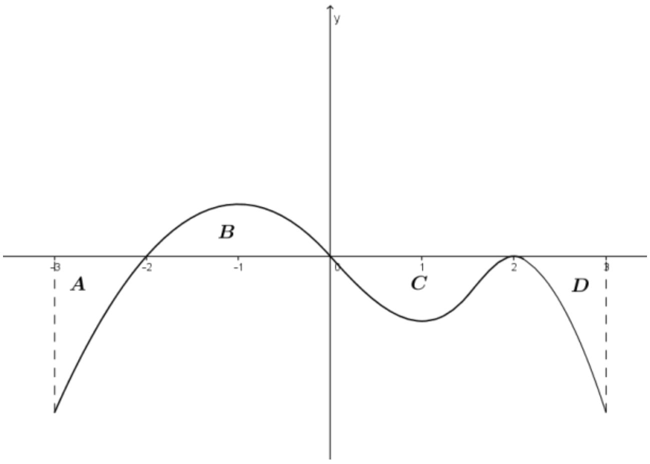


Figura 1

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02X – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: IA48 – SCIENTIFICO INTERNAZIONALE - OPZIONE ITALO-INGLESE
LIA2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE SPAGNOLA

Tema di: MATEMATICA, MATEMATICA E INFORMATICA

PROBLEMA 2

Assegnate le funzioni reali $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^{x-2}$, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano *Oxy*:

1. stabilisci dominio e codominio delle funzioni f e g, e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni $a(x) = f(g(x))$ e $b(x) = g(f(x))$;
2. determina l'equazione della retta r, tangente a F nel suo punto di ascissa e^2. Stabilisci inoltre se esiste una retta s, parallela a r, che sia tangente a G;
3. determina l'equazione della retta t, parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a F. Dimostra che t risulta essere tangente anche a G;
4. detta A la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G, calcola l'area di A e il volume del solido generato ruotando A intorno all'asse y.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02X – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: IA48 – SCIENTIFICO INTERNAZIONALE - OPZIONE ITALO-INGLESE
LIA2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE SPAGNOLA

Tema di: MATEMATICA, MATEMATICA E INFORMATICA

QUESTIONARIO

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di *f* nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.
2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula,
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$
dove *R* ed *r* sono i raggi e *h* l'altezza.
3. Risolvere l'equazione: $5\binom{n+1}{5} = 21\binom{n-1}{4}$.
4. Un solido ha per base la regione *R* del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2+1}$ e l'asse delle *x* nell'intervallo [0, 3]. Per ogni punto *P* di *R*, di ascissa *x*, l'intersezione del solido col piano passante per *P* e ortogonale all'asse delle *x* è un rettangolo di altezza 3*x*. Calcolare il volume del solido.
5. Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2}\right)$.
6. Sia *f* la funzione, definita per tutti gli *x* reali, da
$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$
determinare il minimo di *f*.
7. Detta *A(n)* l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in un cerchio *C* di raggio *r*, verificare che $A(n) = \frac{n}{2}r^2 sen\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.
8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
9. Data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$
determinare il parametro *k* in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.
10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \mathfrak{R}, x \ge 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici *A* (1, 0), *B* (4, 0), *C* (4, 2) e *D* (1, 2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.