



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*  
**ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

**Tema di:** MATEMATICA e FISICA

*Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti.*

**PROBLEMA 1**

Al variare di  $a \in \mathbb{R}$ , si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

- Discutere segno e continuità della funzione  $f_a$  al variare del parametro  $a$ . Dimostrare che, qualunque sia  $a \in \mathbb{R}$ , la funzione  $f_a$  ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.
- Indicata con  $f$  la funzione ottenuta da  $f_a$  per  $a = 2$ , stabilire se  $f$  è derivabile in  $x = 0$ . Studiare l'andamento della funzione  $f$  specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive  $h$  e  $k$  tali che, considerata la funzione

$$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$$

si abbia  $g(3 - x) = f(x)$  per  $x \geq 0$ .

- Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a 42 MeV. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità 0,24 T. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.
- Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente  $\vec{B}$ , viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con  $\mathcal{E}(x)$  l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo  $x$  centimetri (cm) di cammino in acqua e sia  $d\mathcal{E}$  l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto  $dx$ . Supponendo che la funzione  $y = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}$  possa essere approssimata con la funzione  $y = g(x)$ , ponendo  $h = 9/2$  e  $k = 1$ , calcolare l'energia  $\mathcal{E}$  assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.



## *Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

### PROBLEMA 2

Due cariche elettriche puntiformi  $Q_1 = q$  (con  $q$  positivo) e  $Q_2 = -q$  sono collocate rispettivamente nei punti  $A$  e  $B$ , posti ad una distanza  $2k$ . Le cariche sono espresse in coulomb (C) e le distanze in metri (m). Si indichi con  $r$  la retta passante per i punti  $A$  e  $B$ .

- Determinare, in un punto  $C$  della retta  $r$ , l'intensità del campo elettrico generato dalle cariche  $Q_1$  e  $Q_2$ , al variare di  $C$  su  $r$ . Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.
- Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da  $Q_1$  e  $Q_2$  in un punto  $P$  posto sull'asse del segmento  $AB$  decresce quando  $P$  si allontana dal punto medio di  $AB$ . Indicata con  $x$  la distanza di  $P$  dal punto medio di  $AB$ , esprimere l'intensità del campo elettrico in  $P$  in funzione di  $x$ .
- Fissati i parametri reali positivi  $h$  e  $k$ , studiare l'andamento della funzione

$$f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{3/2}}$$

individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.

- Tra le funzioni del tipo

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ , determinare le primitive di  $f$ .

Dimostrare che, se  $h = k^2$ , la funzione  $f$  rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo  $[0; +\infty)$ . Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?



## *Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

### QUESITI

1. Fissati i numeri reali positivi  $a$  e  $b$ , con  $a \geq b$ , provare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x(x^a + x^b) = a$$

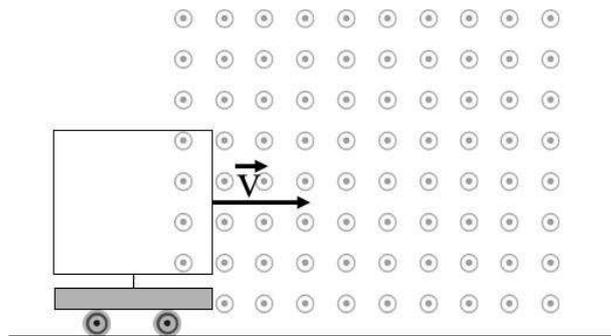
2. È assegnata la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$$

Studiare il segno della funzione  $f$  e provare che essa è crescente. Determinare il valore di

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} dx$$

3. Dimostrare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un rombo è un rettangolo.
4. Considerati i punti  $A(2, 3, 6)$ ,  $B(6, 2, -3)$ ,  $C(3, -6, 2)$  nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  (dove il punto  $O$  indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera  $S$  circoscritta a tale cubo.
5. Una persona lancia simultaneamente due dadi da gioco, con facce numerate da 1 a 6, poi trascrive su un foglio il massimo dei due numeri usciti. Ripetendo molte volte la procedura, quale ci si può attendere che sarà la media dei valori trascritti?
6. Consideriamo un'astronave in moto che viaggia rispetto alla terra a velocità  $v = 0,90 c$ . Supponiamo che a bordo dell'astronave sia presente una scatola di dimensioni  $a = 40$  cm,  $b = 50$  cm e  $h = 20$  cm, con il lato  $b$  disposto parallelamente alla direzione del moto dell'astronave. Per un osservatore posto sulla terra, che volume avrà la scatola? Se l'astronauta lancia la scatola con una velocità  $v_s = 0,50 c$  nella direzione del moto dell'astronave, quale velocità misura l'osservatore sulla terra?
7. Una bobina è costituita da  $N$  spire quadrate di lato  $l$ , ha una resistenza elettrica  $R$  ed è montata su un carrello che può muoversi con attrito trascurabile su un piano orizzontale. Il carrello viene tirato con velocità costante  $\vec{v}$  ed entra in una zona in cui è presente un campo magnetico  $\vec{B}$ , uscente dalla pagina come in figura. Spiegare perché la bobina si riscalda e determinare l'espressione della potenza dissipata. Cosa accade se in carrello viene lanciato con velocità  $\vec{v}$  verso la stessa regione?

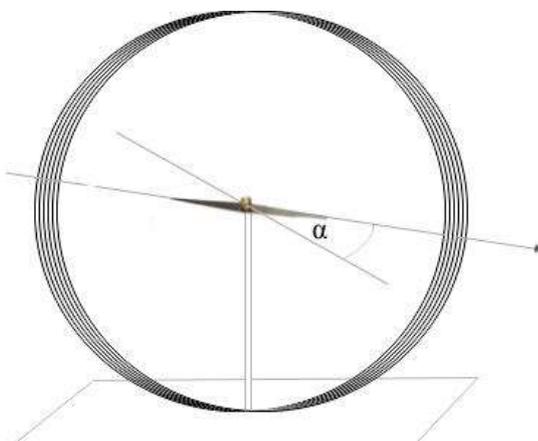




## *Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

8. Una bobina compatta è costituita da 130 spire di raggio  $R = 15$  cm.

Si pone un ago magnetico, le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a  $R$ , al centro della bobina, come in figura.



Il piano della bobina viene orientato in modo da contenere l'ago che, a sua volta, è orientato nella direzione della componente orizzontale del campo magnetico terrestre. Quando la bobina è attraversata da corrente, l'ago devia di un angolo  $\alpha$ . Spiegare la causa di questa deviazione.

In tabella sono riportati alcuni valori, misurati sperimentalmente, di  $\alpha$  e della corrispondente corrente nella bobina. Utilizzando questi dati, misurare l'intensità della componente orizzontale del campo magnetico terrestre, con la relativa incertezza.

Deviazione $\alpha$	10°	20°	30°	40°	50°
Intensità di corrente	11,4 mA	23,3 mA	36,8 mA	52,4 mA	73,9 mA

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	$e$	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C
massa del protone	$m_p$	$1,673 \cdot 10^{-27}$ kg
permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A <sup>2</sup>
velocità della luce nel vuoto	$c$	$2,998 \cdot 10^8$ m/s
elettronvolt	eV	$1,602 \cdot 10^{-19}$ J

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.