Prove di Matematica esami di maturità 1970 - 1997

1970 Sessione ordinaria

Verificare che le due curve di equazione $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ hanno due punti in comune. Indicare l'andamento dei predetti grafici cercandone in particolare gli eventuali punti di massimo o minimo relativi. Determinare l'area della regione di piano limitata dai due archi dei grafici aventi per estremi i due punti comuni. Considerate poi le tangenti ai due grafici nei punti comuni, calcolare l'area del quadrilatero convesso da esse determinato.

Sessione suppletiva

Si trovino i coefficienti della funzione $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, sapendo che:

a) essa si annulla per $x = 0$;

b) la sua derivata prima si annulla per $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

c) il suo grafico, in un riferimento cartesiano ortogonale $O\ (x, y)$ ha, nel punto di ascissa $x = -1$, la tangente parallela alla retta di equazione $y = -x$.

Si descriva l'andamento del grafico. Infine si determini l'area del rettangoloide, relativo al grafico, avente per base l'intervallo di estremi $x = 0$, $x = 2$.

1971 Sessione ordinaria

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti:

1) E' dato il triangolo *AOB*, rettangolo in *O*, del quale sia *h* l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta x l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$ e posto $tg\frac{x}{2} = t$, si esprima per mezzo di *h* e di *t* il perimetro del triangolo e si studi l'andamento della funzione di *t* così ottenuta.

2) Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio assegnato, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.

3) Si studi il grafico della funzione $y = 2\text{sen}x + \text{sen}2x$, nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.

4) Considerata la generica parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$, si determinino i coefficienti a, b, c in modo che essa passi per i punti (-6, 0), (0, 2), (0, 6); indi si calcoli l'area della regione piana limitata dalla curva e dalle tangenti ad essa nei punti di ascissa nulla.

Sessione suppletiva

Il candidato risolva a sua scelta almeno due dei seguenti quesiti:

1) In un piano riferito a un sistema cartesiano ortogonale O (x, y), si rappresenti la curva di equazione $y = \frac{x-1}{x+1}$. Condotta poi per il punto (-1, 1) la retta di coefficiente angolare *m*, si dica per quali valori di *m* una delle sue intersezioni con la curva appartiene al primo o al quarto o al terzo quadrante. Si determini inoltre la lunghezza della corda minima intercettata sulla retta dalla curva e si dica qual è il rapporto, maggiore di 1, fra le aree dei triangoli che le tangenti negli estremi di tale corda formano con gli assi cartesiani.

2) Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio *r*, determinare quello per il quale è massima l'area della superficie totale, dopo averne trovata l'espressione in funzione della semiapertura *x* di un generico cono.

3) Si studi il grafico della funzione $y = \text{sen}x + \text{sen}2x$, nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.

4) Si esamini la posizione delle radici dell'equazione in x: $(m - 1)x^2 - (m + 1)x + (2m - 1) = 0$ rispetto all'intervallo (-1, 1).

1972 Sessione ordinaria

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti:

1) Si scriva l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$ ed avente il centro sulla retta $y = 4$ e si calcolino le coordinate degli estremi del diametro parallelo all'asse delle x. Si determinino poi i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che le parabole da esse rappresentate abbiano in comune il punto $C(0, 4)$ e siano tangenti all'asse delle ascisse. Tra queste parabole si trovino quelle che passano per l'uno o per l'altro degli estremi del diametro suddetto. Si calcoli infine l'area della regione limitata dalle predette parabole e dall'asse delle x.

2) Data una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si prendano su di essa, da parte opposta di AB, due punti C e D tali che $A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$, $A\hat{B}D = \alpha$.

Si consideri la funzione: $y = \dfrac{\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2}{\overline{BC}^2}$, espressa per mezzo di $x = \text{tg}\alpha$, e se ne studi il grafico.

3) Si studi la variazione della funzione $y = \text{sen}2x \cdot \cos x$ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

4) Si determini l'altezza e il raggio di base del cono di volume minimo circoscritto ad una data sfera di raggio r. Si dimostri che il suddetto cono è anche quello di minima superficie totale.

Sessione suppletiva

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti:

1) Date le due parabole rappresentate dalle equazioni $y = x^2 - 7x + 12$, $y = 4x^2 - 25x + 36$ si determinino le coordinate dei punti comuni, le equazioni delle tangenti comuni e le coordinate dei punti di contatto. Si calcoli poi l'area di una delle due regioni piane limitate dalle parabole e da una delle suddette tangenti.

2) Si disegni la curva di equazione $y = \dfrac{2x}{x^2 + x - 1}$; si determinino le coordinate dei punti comuni ad essa e alla sua simmetrica rispetto all'asse delle y e si calcoli l'area del quadrilatero convesso formato dalle tangenti alle due curve nei punti comuni di ascissa non nulla.

3) Si studi la variazione della funzione $y = \text{tg}x - 2\text{sen}x$ nell'intervallo $-\pi/2 \le x \le 3\pi/2$.

4) Si discuta la seguente equazione $2kx^2 + 2(k + 1)x + k^2 + 1 = 0$, per x compreso tra $(-1/2, 1)$.

1973 Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni, il candidato tratti quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) Si scrivano le equazioni delle due circonferenze C' e C'' tangenti alla parabola di equazione $y = 5 - x^2$ ed alla retta di equazione $y = 1$ e si indichino con r' ed r'' ($r' > r''$) i rispettivi raggi. Dopo aver determinato r' ed r'', si scriva l'equazione di un'altra circonferenza C''' tangente alla C'', avente il centro sulla retta degli altri due centri e raggio uguale ad r'. Inoltre si trovi l'equazione della parabola tangente a C'' e a C''' e si calcoli l'area della regione di piano limitata dalle due parabole.

2) Si disegni il grafico della funzione $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ e se ne determinino i punti per i quali la distanza dal punto $A(0, 1)$ assume valore minimo.

3) Si studi la variazione della funzione $y = 3\cos 2x - 4\cos x$ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

4) Si studi la funzione $y = \frac{1 + x^3}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scriva poi l'equazione della tangente nel suo punto A di ordinata nulla e quella della retta passante per lo stesso punto e tangente alla curva in un ulteriore punto B. Detta C l'intersezione della prima tangente con il grafico, si calcoli l'area della regione piana limitata dal segmento BC e dal grafico stesso.

Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni, il candidato tratti quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) Dato il triangolo rettangolo AOB, di cateti $OA = a$ e $OB = b$, si prenda sull'ipotenusa AB un punto P di cui sia Q la proiezione ortogonale su OB e si ponga $QP = x$; si consideri poi la funzione $y(x) = V_1/V_2$, essendo V_1 e V_2 i volumi dei due solidi generati dalla rotazione completa del trapezio $OAPQ$ attorno, rispettivamente, al cateto OA e al cateto OB e, indipendentemente dalla questione geometrica, la si studi per x variabile in tutto il campo reale.

2) In un riferimento cartesiano $O\ (x, y)$ sono date la parabola $y = -2x^2/3 + 27/8$ e le circonferenze $x^2 + y^2 - 2ky = 0$ con k parametro reale. Delle predette circonferenze si consideri quella che risulta tangente (internamente) alla parabola ed appartiene al semipiano $y \ge 0$. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti comuni alla parabola e alla circonferenza e si dica qual è l'ampiezza dell'angolo formato dalle due tangenti.

3) Si studi la variazione della funzione $y = \operatorname{sen} 2x - \operatorname{tg} x$ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

4) Si disegnino i grafici delle funzioni $y = \frac{x(1 - 2x)}{1 + 2x}$, $y = \frac{1}{1 + 2x}$ e si scrivano le equazioni dei rispettivi asintoti. Si calcoli poi la differenza tra l'area della regione piana delimitata dal secondo grafico e dall'asintoto obliquo del primo e l'area della regione formata dal primo grafico con l'asse delle x.

1974 Sessione ordinaria

Delle seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) Assegnata la funzione: $y = \text{sen}x + a\cos x + b$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$, si determinino i valori di a e di b in modo che ammetta un massimo relativo $y = 0$ nel punto $x = \pi/6$ e si disegni la curva rappresentativa della funzione ottenuta. Condotta la retta tangente alla curva nel punto A di ascissa $x = 0$ e tracciata la retta $x = \pi/2$, si calcoli l'area della regione piana limitata da tale retta, dalla tangente in A alla curva e dalla curva.

2) Sono assegnate due circonferenze C e C' esterne tra loro e rispettivamente di centri O e O' e raggi r ed $r/2$. Sul segmento $\overline{OO'} = a$ si prenda un generico punto P non interno alle due circonferenze e si conducano da esso le rette tangenti a C e C'. Gli archi aventi per estremi i punti di contatto ed intersecanti il segmento OO' generano, in una rotazione di 180° attorno ad OO', due calotte sferiche. Posto $\overline{OP} = x$, si determini la posizione di P in corrispondenza della quale risulti massima la somma delle aree delle due calotte.

3) Si studi la funzione: $y = \dfrac{x^3}{2x^2 - 1}$ e se ne disegni il grafico. Presi sulla curva i punti A e B rispettivamente di ascissa $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, si determinino i punti dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ nei quali la tangente alla curva è parallela alla retta AB.

Si espongano brevemente gli elementi della teoria per il calcolo degli asintoti di una curva di equazione $y = f(x)$.

Sessione suppletiva

1) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola da essa rappresentata sia tangente alle tre rette rispettivamente di equazione: $2x + y - 3 = 0$, $4x - y - 12 = 0$, $y = 0$. Detti A, B, C i rispettivi punti di contatto, si determini sull'arco ACB il punto P tale che risulti massima l'area del triangolo APB. Si calcolino le aree dei segmenti di parabola determinati dai lati AP e PB di tale triangolo.

2) Si consideri la curva di equazione $y = x(x - 2)^2$ e siano A, B, C i suoi punti d'intersezione con la retta di equazione $y = x$. Se A', B', C' sono gli ulteriori punti comuni alla curva e alle rette tangenti ad essa condotte rispettivamente per A, B, C, si verifichi che A', B' C' sono allineati.

3) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$ e si determinino i valori delle costanti a, b, c in modo che risulti $f(1) = \dfrac{1}{6}$, $f(2) = \dfrac{1}{24}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{8}{15}$ e si disegni il grafico della funzione così ottenuta.

Si espongano brevemente gli elementi della teoria dei massimi e minimi relativi di una funzione $y = f(x)$.

1975 Sessione ordinaria

Delle seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) Assegnata una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si consideri per *A* la retta tangente e su di essa si consideri un punto *M* tale che sia $\overline{AM} = x$. Da *M* si tracci l'ulteriore retta tangente alla circonferenza e sia *C* il punto in cui essa incontra il prolungamento di *AB*. Posto $\overline{AC} = y$, si esprima *y* in funzione di *x* e si disegni il grafico relativo.

2) In un riferimento cartesiano ortogonale *xOy* sono date due parabole *C*' e *C*'' rispettivamente di equazione $y = -x^2 + 2ax$, $y = \frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3}$ $a > 0$; si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due parabole e si determini il valore di *a* per cui tale area risulta minima.
Si completi la trattazione dimostrando che se $F(x)$ è una primitiva di una funzione $f(x)$ per $a \leq x \leq b$ risulta $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

3) Si conduca internamente ad un angolo retto *AOB* una semiretta *OC* che forma con *OA* un angolo $A\hat{O}C = x$; presi rispettivamente su *OA* ed *OB* due punti *M* ed *N* tali che $\overline{OM} = 1$, $\overline{ON} = \sqrt{3}$, siano *M*' ed *N*' le rispettive proiezioni di *M* ed *N* su *OC*. Detto *P* il punto medio di *M*'*N*', si determini *x* in modo che risulti massima l'area del triangolo *NOP*.

Sessione suppletiva

1) Si studi la funzione $y = x^2(3 - x)$ e se ne disegni il grafico. Detti *A* e *B* i punti corrispondenti agli estremi relativi della funzione, si conducano per essi le rette tangenti alla curva e siano *C* e *D* i rispettivi punti di contatto. Si calcoli l'area del quadrilatero convesso limitato dai segmenti *AC* e *BD* e dagli archi *AD* e *BC* della curva.
Si completi la trattazione dimostrando che se una funzione reale $f(x)$ della variabile reale *x* ha in un punto *c*, del suo campo di esistenza, derivate prima e seconda verificanti le condizioni $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$, queste sono sufficienti per dimostrare che in *c* la $f(x)$ ha un massimo relativo.

2) Assegnato in un riferimento cartesiano ortogonale *xOy*, si consideri la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Detto *AB* l'arco di essa contenuto nel primo quadrante, si determini su tale arco un punto *P* tale che, indicati con *Q* il punto d'intersezione della retta tangente alla circonferenza per *P* con l'asse delle ascisse e con *S* quello d'intersezione della retta *OP* con la retta di equazione $y = 2$, l'area del triangolo *QPS* risulti minima.

3) In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si consideri una corda *AC* tale che sia $C\hat{A}B = 2x$. Detto *D* il punto medio dell'arco *BC*, si determini *x* in modo che l'area del quadrilatero *ACDB* risulti massima.

1976 Sessione ordinaria

Delle seguenti questioni il candidato risolva quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) In un sistema di assi coordinati cartesiani ortogonali si studi la funzione $y = \frac{2x-1}{2x^3}$ e se ne disegni il grafico. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per il flesso e per l'ulteriore punto d'intersezione della curva con la tangente inflessionale e si calcoli l'area della regione finita delimitata dalle due curve.

2) Si studi la funzione $y = x + 2\text{sen}x$ e se ne disegni il grafico nell'intervallo $-2\pi \le x \le 2\pi$. Si determinino le coordinate dei punti comuni alla curva e alla retta di equazione $y = x - 2$ e si calcoli l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dalla retta nell'intervallo indicato.

3) In un cono circolare retto avente per raggio di base e per altezza rispettivamente i segmenti r e hr, si inscriva il cilindro avente la base sul piano base del cono ed il volume massimo. Per quali valori di h tale cilindro risulta anche equilatero? In questo caso particolare si trovi anche il cilindro inscritto per il quale è massima la superficie totale.

4) Si dimostri che $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Sessione suppletiva

1) In un sistema di assi cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni $y = ax^2 - 2x + 2$, $y = 2ax^2 - 2x + 1$ e si determini il valore del parametro reale a in modo che risulti minima la distanza fra i due vertici. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

2) Presi su una circonferenza di raggio unitario tre punti A, B, C tali che $AB = BC$, si studi la funzione $y = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$ e se ne disegni il grafico.

3) In un sistema di assi cartesiani si determinino l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(0; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(+1; 0)$ e quella della parabola, con l'asse parallelo all'asse y, passante per gli stessi punti e si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve. Nel semipiano delle ordinate positive si tracci la retta $y = h$ che incontra in P e in Q la circonferenza ed in R e in S la parabola. Detti P', Q', R', S' le proiezioni di P, Q, R, S sull'asse x, si considerino i pentagoni $APP'Q'Q$ e $ARR'S'S$ inscritti negli archi CAB di circonferenza e di parabola rispettivamente e si determini per quale valore di h è massima la differenza fra i volumi dei solidi da essi generati in una rotazione di mezzo giro attorno all'asse delle ordinate.

4) Si dimostri che $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1977 Sessione ordinaria

Delle seguenti questioni il candidato risolva quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) In un sistema di assi ortogonali cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni $y = 3x - x^2$, $y = x^2 - 2x$. Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si determini il triangolo avente un vertice nel punto comune alle due curve, diverso dall'origine, e il lato opposto parallelo all'asse delle ordinate e la cui area abbia valore massimo. Si calcolino inoltre le aree delle regioni finite delimitate dai lati di questo triangolo e dalle curve stesse.

2) I punti *A*, *B*, *C*, non allineati, sono vertici di un triangolo i cui lati *BC* e *CA* sono lunghi rispettivamente *a*, *b*. Si dica come deve essere scelto l'angolo acuto $ACB = \gamma$ affinché la somma dei quadrati delle altezze del triangolo, relative ai lati *BC* e *CA*, diminuita del quadrato del lato *AB*, sia massima. Posto $b = ma$ ($m > 0$) si determini per quale valore di *m* tale angolo assume ampiezza minima.

3) Data la funzione $y = a\text{sen}x + b\cos x$ si determinino i coefficienti *a*, *b* in modo che per $x = \frac{2}{3}\pi$ sia $y = 1$ e che i valori estremanti di *y* siano -2 e 2. Se ne disegni il grafico nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$. Posto $y = c\,\text{sen}(x + \varphi)$ si calcolino *c*, φ in modo che questa funzione coincida con quella assegnata. Fatte le sostituzioni $y = s$, $x = 2\pi t$, dove *s* rappresenta lo spostamento dall'origine di un punto *P* che si muove su di una retta nel tempo *t*, si aggiunga, facoltativamente, la descrizione del moto di *P*, determinando, in particolare, gli istanti nei quali la velocità è nulla e quelli nei quali è massima.

4) Si enunci la regola di De L'Hôpital e se ne dia un esempio di applicazione.

Sessione suppletiva

1) Fra le parabole del tipo $y = -\frac{1}{4}x^2 + c$ ($c > 0$) si determini quella per la quale i punti *P* di essa, che hanno minima distanza dall'origine *O* degli assi cartesiani di riferimento, sono tali che $\overline{OP}^2 = 12$. Tracciate le tangenti alla parabola nei punti P_1 e P_2 così determinati, si calcoli l'area del triangolo mistilineo P_1P_2T, dove *T* è il punto d'incontro delle tangenti e P_1P_2 l'arco di parabola.

2) Si studino le funzioni $y = \frac{2}{x^2}$ e $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$ e se ne disegnino i grafici in un sistema cartesiano ortogonale. Si verifichi che i loro punti comuni stanno su di una retta di cui si chiede l'equazione. Si calcoli inoltre l'area della regione di piano limitata dalle due curve.

3) Dato l'angolo $aOb = \gamma$ si fissino sulla semiretta *Ob* i punti *P* e *Q* tali che $\overline{OP} = 1$, $\overline{OQ} = 2$; preso sulla semiretta *Oa* un punto *A*, si studi la funzione $y = \frac{\overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2}$ della quale si disegni il grafico per $\gamma = \pi/6$. In questo caso particolare si costruiscano sulla semiretta *Oa* i punti aventi da *P* e da *Q* distanze estremanti per la *y*.

4) Si dimostri la regola di derivazione della funzione $y = x^{m/n}$.

1978 Sessione ordinaria

Delle seguenti questioni il candidato risolva quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le parabole rispettivamente di equazione: *C*') $y = 2x - 2x^2$, *C*'') $y = x - x^2$. Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si conducano: la retta di equazione $y = k$ ($k > 1/4$) sulla quale *C*' intercetta la corda *AB*; la retta tangente a *C*'' nel suo vertice sulla quale la stessa *C*' intercetta la corda *CD*. Si determini per quale valore di *k* l'area del trapezio *ABCD* acquista il valore massimo.

2) Si studi la funzione $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scriva l'equazione della circonferenza tangente ai tre rami della curva e si calcolino il perimetro e l'area del triangolo individuato dai tre punti di contatto.

3) Tra le parabole di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + k$ si individui quella sulla quale la retta $2y = x + 2$ intercetta una corda *AB* di lunghezza $l = \frac{5}{2}\sqrt{5}$. Condotte in *A* e in *B* le rette tangenti alla parabola trovata, si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dall'arco di parabola *AB* e dalle due tangenti.

4) Gli asintoti di una curva: si illustri il procedimento per determinarli nel caso di una curva rappresentante una funzione razionale fratta.

Sessione suppletiva

1) In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino: la parabola di equazione $y = 2x - x^2$ che incontra l'asse delle ascisse nei punti *O* e *C*; la retta di equazione $y = k$ ($0 < k < 1$) che incontra la parabola nei punti *A* e *B*. Si determini per quale valore del parametro *k* risulta massimo il volume del solido generato dal trapezio *OABC* in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.

2) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = 1 + ax + \frac{b}{x^2}$ in modo che la curva che la rappresenta abbia un estremo relativo nel punto *A*(1; 0). Se ne disegni il grafico. Condotta per *A* la retta tangente alla curva nel punto *B*, si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva, dalla retta *AB* e dall'asse delle ascisse.

3) In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino i punti *O*(0; 0) ed *A*(2; 2) e la circonferenza avente per diametro *OA*. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola che la rappresenta passi per i due punti dati e abbia in *A* come tangente la retta tangente alla circonferenza. Si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

4) Si dimostri il teorema relativo alla determinazione dei massimi e minimi relativi di una funzione.

1979 Sessione ordinaria

1) Data in un sistema di assi coordinati cartesiani la parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 1$ si scriva l'equazione della retta che, nella regione finita di piano limitata dalla stessa parabola e dagli assi, sia tangente alla curva e formi con gli assi stessi il triangolo di area massima.

2) Dato in una circonferenza di raggio r l'angolo al centro AOB, si costruisca sulla corda AB, da parte opposta al centro O, il triangolo isoscele ABC avente per base AB e per altezza $\overline{CH} = 2k\overline{AB}$. Si determini il valore dell'angolo AOB per il quale il quadrilatero $OACB$ ha area massima. Si calcoli poi il valore di k per cui l'ampiezza dell'angolo AOB del quadrilatero ottenuto è 150°.

3) Si studi la funzione $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scrivano l'equazione della parabola avente come asse l'asse delle ordinate, vertice nel punto (0; 1) e tangente alla curva e quella della parabola a questa simmetrica rispetto alla congiungente i punti di contatto. Si calcolino le aree delle tre regioni finite di piano, limitate dalle parabole e dalla curva data.

4) Si dimostri la continuità delle funzioni derivabili.

Sessione suppletiva

1) Data la funzione $y = \frac{4x^2 + 1}{3x}$ se ne rappresenti il grafico. Preso un punto P sull'arco della curva che appartiene al primo quadrante, si conducano per esso le parallele agli asintoti che incontrano questi nei punti A e B rispettivamente e si determini la posizione di P per la quale è minima la somma dei segmenti PA e PB.

2) Data una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si determinino su di essa i punti tali che, condotti i segmenti perpendicolari rispettivamente al diametro ed alla tangente alla circonferenza in A, i rettangoli che si ottengono abbiano area massima.

3) Si studi la funzione $y = x + \frac{4}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Detti A il punto estremo relativo e B l'ulteriore punto d'intersezione della curva con la tangente in A, si scriva l'equazione della parabola passante per A e tangente alla curva in B e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve.

4) Si dimostri per via elementare che se due grandezze positive hanno somma costante, il prodotto è massimo quando sono uguali.

1980 Sessione ordinaria

1) Sui lati opposti *AB* e *CD* del rettangolo *ABCD* ed esternamente ad esso si costruiscano due triangoli isosceli *APB* e *CQD* aventi gli angoli alla base di ampiezza α. Sapendo che il perimetro dell'esagono *APBCQD* è $2p$, si determinino le lunghezze dei lati del rettangolo in modo che l'area dell'esagono risulti massima. Per quali valori di α tale esagono è inscrivibile in una circonferenza?

2) Si rappresenti la funzione $y = \dfrac{6x^2 + 2x + 3}{2(2x^2 + 1)}$ dopo aver determinato massimi, minimi, flessi e asintoti. Effettuata la sostituzione $x = t$, $y = s$, si interpreti la s come la distanza percorsa su di una retta da un punto al variare del tempo t, si dica per quali valori del tempo t positivo la velocità è massima in modulo e si descriva il moto del punto. Facoltativamente si interpreti il significato della funzione per $t < 0$.

3) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione $y = x^2 + \sqrt{3}x + 1$. Condotte per l'origine *O* le due rette tangenti ad essa, si scriva l'equazione della circonferenza passante per *O* e per i due punti di contatto e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

4) Si enuncino le condizioni di derivabilità e di integrabilità delle funzioni e si dia qualche esempio di funzione integrabile ma non derivabile.

Sessione suppletiva

1) Data la funzione $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$ se ne rappresenti il grafico dopo aver determinato i massimi e i minimi, per i valori di x nell'intervallo $(0; 2\pi)$. Si consideri poi facoltativamente la funzione $y = \log\left|\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\right|$ e la si rappresenti utilizzando gli elementi ottenuti per la rappresentazione della funzione precedente.

2) In un settore circolare di raggio r e di ampiezza $\pi/6$, si inscriva un rettangolo avente un lato su uno dei raggi limitanti il settore e gli altri due vertici l'uno sull'arco e l'altro sul rimanente raggio. Si determini tra tali rettangoli quello per il quale è minima la diagonale e si costruisca, in tale caso particolare, la figura con riga e compasso.

3) Si scriva l'equazione della parabola α avente l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, passante per i punti $P(0; 3)$, $Q(2; 3)$ ed il cui vertice V stia sulla parabola β di equazione $y = -x^2 + 3x$. Detto W l'ulteriore punto comune alle due curve, si scrivano l'equazione della retta tangente ad α in W e quella della retta tangente a β in V e si calcoli l'area del trapezio mistilineo delimitato da queste due rette e dalle due parabole.

4) Applicando la definizione di derivata se ne determini il valore per la funzione $y = \operatorname{sen}2x$.

1981 Sessione ordinaria

1) In un sistema di assi coordinati cartesiani si scrivano le equazioni delle due circonferenze passanti per l'origine O ed aventi i centri rispettivamente nei punti $C'(2; 0)$ e $C''(-1/2; 0)$. Condotte per il punto O due rette mutuamente perpendicolari, delle quali la prima incontra le due circonferenze, oltre che nel punto O, nei due punti A e B rispettivamente e la seconda nei punti C e D, si determini il quadrilatero $ACBD$ avente area massima.

2) Si studi la funzione $y = x^2 + \frac{16}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scrivano le equazioni delle due parabole, con gli assi paralleli all'asse delle ordinate, passanti per l'estremo relativo A della curva di ascissa positiva, per il punto B della curva di ascissa $x = 1$ e tali che l'area della regione finita di piano limitata dall'arco AB della curva e da ciascuna delle due parabole sia 7/3.

3) In un triangolo di base $AB = a$ ed altezza $CH = h$ si inscriva il rettangolo, con un lato su AB e i vertici opposti sugli altri due lati, che in una rotazione completa attorno alla retta AB genera il solido di volume massimo. Supposto che gli angoli adiacenti alla base siano uno doppio dell'altro si calcolino i valori che essi assumono quando detto volume massimo è $\frac{a^3}{36}\pi$.

4) Si dimostri l'identità $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Sessione suppletiva

Delle seguenti questioni il candidato risolva quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) In una circonferenza di raggio r si consideri la corda AB che dista $r/2$ dal centro. Si prenda sul maggiore degli archi AB il punto C, si prolunghi AC di un segmento CD tale che $\overline{CD} = \overline{AC}$ e si determini per quale posizione di C è massima l'area del triangolo CDB.

2) Si scrivano le equazioni delle due parabole, con gli assi paralleli all'asse delle ordinate, aventi nel punto $A(1; 0)$ la stessa retta tangente di equazione $y = 2x - 2$ ed intersecanti l'asse delle ascisse, la prima nel punto $B(3; 0)$ e la seconda nel punto C interno ad AB, tale che il segmento parabolico determinato su questa da AC risulti la quarta parte del segmento parabolico determinato sulla prima da AB.

3) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2}$ in modo che la curva da essa rappresentata ammetta come asintoto obliquo la retta di equazione $y = x - 2$, abbia un estremo nel punto di ascissa $x = 2$ ed un flesso nel punto di ascissa $x = -1$. Se ne disegni il grafico. Si determinino inoltre le intersezioni della curva con l'iperbole equilatera avente per asintoti gli assi coordinati e passante per il punto (1; 3) e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve.

4) Dimostrare la formula che esprime le combinazioni semplici di n oggetti a k a k.

1982 Sessione ordinaria

Delle seguenti questioni il candidato risolva quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che la curva da essa rappresentata tocchi la retta $y = x$ nel punto $A(1; 1)$ e la retta $y = 0$ nel punto $B(3; 0)$. Se ne disegni il grafico. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due rette e dall'arco di curva AB.

2) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri il triangolo equilatero ABC avente il vertice A nel punto $(3; 0)$, il vertice B sull'asse delle ordinate e il vertice C sulla retta $x = 3$. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per i vertici A, B del triangolo e divida questo in due parti delle quali quella determinata dal lato AB sia metà dell'altra.

3) Si studi la funzione $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$ nell'intervallo chiuso $[0; 2\pi]$ e se ne disegni il grafico.

4) Si calcoli la somma $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$ per $n \, \varepsilon \, N$ tendente all'infinito.

Sessione suppletiva

Delle seguenti questioni il candidato risolva quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) Si studi la funzione $y = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2$ e se ne disegni il grafico. Si determinino le intersezioni di questa curva con la curva di equazione $y = \frac{1}{x} - 1$ e si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

2) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ in modo che la parabola da essa rappresentata sia tangente alle rette di equazione $y = x$ e $y = x/2$ ed abbia la corda congiungente i punti di contatto di lunghezza 5/2. Si calcoli l'area del segmento parabolico delimitato dalla stessa congiungente.

3) Si studi la funzione $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$ nell'intervallo aperto $(0, 2\pi)$ e se ne disegni il grafico.

4) Si verifichi che $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{\cos x - 1} = 2$.

1983 Sessione ordinaria

1) Si studi la funzione $y = \frac{a^2}{x^2} - 1$ e se ne disegni il grafico. Si determinino le intersezioni della curva da essa rappresentata con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ e si trovi il valore di a per cui dette intersezioni sono vertici di un esagono regolare. In questo caso particolare si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

2) Una parabola passante per gli estremi di un diametro di una circonferenza di raggio r ha le tangenti in tali punti perpendicolari fra loro e l'asse del diametro come asse di simmetria. Si scrivano, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, le equazioni della parabola e della circonferenza e si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

3) Si studi la funzione $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ e se ne disegni il grafico. Utilizzando il grafico precedente si studi la funzione $y = e^{f(x)}$, dove $f(x)$ è la funzione precedentemente studiata.

4) Si dimostri per via elementare che se due grandezze positive hanno somma costante, il loro prodotto è massimo quando esse sono uguali.

Sessione suppletiva

1) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che la curva da essa rappresentata abbia due estremi relativi nei punti $A(1; 1)$ e $B(-1; -1)$. Se ne disegni il grafico. Si scriva l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse delle ordinate, passante per il punto A e per i punti in cui la curva data incontra il semiasse positivo delle ascisse e si calcolino le aree delle regioni di piano delimitate dalle due curve.

2) Sulla semiretta asse di simmetria di una parabola assegnata si fissi un punto Q. Si determinino, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, le coordinate dei punti P della parabola le cui distanze da Q hanno un valore minimo e si scriva l'equazione della circonferenza avente centro in Q e per raggio tale valore minimo.

3) Si studi la funzione $y = a\operatorname{sen}x + \cos^2 x$ e se ne disegni il grafico dopo aver determinato a in modo che la curva abbia un flesso nel punto di ascissa $x = 7\pi/6$.

4) Si dimostri il teorema di Torricelli $\left(\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\right)$.

1984 Sessione ordinaria

1) Si studi la funzione $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ e se ne disegni il grafico. Si individui la traslazione di assi $x = X + a$, $y = Y + b$ che rende la curva simmetrica rispetto all'origine e si scriva l'equazione della curva trasformata. Si determinino le coordinate dei punti in cui la curva data incontra la bisettrice del primo e del terzo quadrante e si calcoli l'area di una delle regioni finite di piano delimitate dalla curva e dalla bisettrice stessa.

2) Considerato il triangolo ABC con i lati $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BC = 5a$ si scriva, in un sistema di assi coordinati cartesiani opportunamente scelto, l'equazione della parabola con asse perpendicolare al lato BC, tangente in B al lato AB e passante per il punto C. Si indichi il criterio seguito nella scelta del sistema di riferimento. Si calcolino le aree delle due parti in cui il triangolo è diviso dall'arco di parabola ad esso interno.

3) Si consideri una circonferenza di diametro $AB = 2r$ e si conduca per il punto A, perpendicolarmente al piano della stessa circonferenza, il segmento $AP = a$. Se MN è una corda della circonferenza perpendicolare ad AB, si determini per quale posizione di MN risulta massimo il volume della piramide $PAMN$. Si risolva il problema anche per via elementare.

4) Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

Sessione suppletiva

1) Si disegni il grafico della funzione $y = x^3 - 2x^2 + x + a$ attribuendo ad a un valore particolare a scelta del candidato. Si dica come deve essere scelto a perché la curva rappresentativa incontri l'asse delle ascisse in uno, due o tre punti.

2) Si considerino le parabole di equazioni $y^2 = \frac{x}{2}$, $y^2 = -x + a^2$. Nella regione finita di piano compresa fra le due curve e l'asse delle ascisse si inscriva il rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati che, in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, genera il cilindro di massimo volume. In tal caso si calcoli il volume del solido generato nella precedente rotazione dal triangolo mistilineo avente come lati la base superiore del rettangolo e gli archi delle due parabole compresi tra gli estremi di tale base e il punto d'incontro delle parabole stesse.

3) Dato il triangolo rettangolo isoscele ABC, con $\hat{A} = 90°$, $AB = a$ si conduca per il vertice C la retta non secante il triangolo, tale che risulti massima la somma delle perpendicolari AM e BN condotte su di essa. Si costruisca graficamente la soluzione.

4) Esaminati i diversi casi di discontinuità di una funzione si dia un esempio per ciascuno di essi.

1985 Sessione ordinaria

1) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione $y = 3x - x^2$. Si scrivano l'equazione della parabola ad essa simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e le equazioni delle due parabole ad esse simmetriche rispetto alla retta congiungente i loro vertici. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle quattro parabole e si trovi il perimetro del quadrato in essa inscritto con i lati tangenti alle parabole stesse.

2) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la cubica di equazione $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ e si individui la traslazione $x = X + a$, $y = Y + b$ che porta l'origine del sistema nel punto di minimo relativo. Si scriva l'equazione della curva nel nuovo sistema di riferimento e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalla curva e dagli assi delle ascisse dei due sistemi.

3) In una circonferenza di centro O e raggio unitario si conduca la corda AB tale che, costruito il triangolo equilatero ABC da parte opposta di O rispetto ad AB, l'area del quadrilatero $ACBO$ risulti massima. Si esprimano i valori che assumono la lunghezza della corda AB e l'ampiezza dell'angolo $A\hat{O}B$.

4) Si dia la definizione di limite di una successione e si portino esempi di successioni convergenti, divergenti e indeterminate.

Sessione suppletiva

1) Si consideri la parabola di equazione $y = 3x - x^2$. Si scriva l'equazione della curva ad essa simmetrica rispetto alla retta $y = x$ e si determini, nella regione finita di piano delimitata dalle due curve, il segmento di lunghezza massima perpendicolare all'asse di simmetria. Si calcoli poi l'area della stessa regione di piano.

2) In un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto si scriva l'equazione (razionale intera) della cubica che passa per i vertici di un triangolo rettangolo isoscele ABC di ipotenusa BC e che incontra ulteriormente la retta BC, dalla parte di C, nel punto D tale che $BC = CD$. Se ne disegni il grafico. Si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalla curva e dai lati del triangolo.

3) Fra le piramidi rette a base quadrata aventi la stessa superficie laterale si determini quella di volume massimo.

4) Si dia la definizione di limite di una funzione e si portino esempi di funzioni convergenti o divergenti in un punto di un intervallo finito.

1986 Sessione ordinaria

Delle seguenti questioni il candidato risolva quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) Sia data nel piano cartesiano la circonferenza *A* di raggio uno e centro nell'origine. Si determinino le equazioni delle circonferenze *B* e *C* appartenenti al primo quadrante, tangenti ad entrambi gli assi coordinati e alla circonferenza *A* e, rispettivamente, interna ed esterna ad *A*. Le circonferenze *B* e *C* e gli assi coordinati determinano tre regioni finite appartenenti al primo quadrante ed esterne a *B* e *C*. Si calcoli l'area complessiva delle tre regioni.

2) Si studi la funzione $y = x^4 - kx^2$ distinguendo vari casi a seconda dei valori assunti dal parametro reale k. In particolare si calcoli il minimo della funzione per ogni valore di k. Si disegnino i grafici corrispondenti ai valori $k = -1$ e $k = 1$. Il secondo grafico delimita insieme alla retta $y = 0$ due regioni finite del piano, contenute rispettivamente nel terzo e nel quarto quadrante; si dimostri che l'una è simmetrica dell'altra rispetto alla retta $x = 0$ e si calcoli l'area di una di esse.

3) Verificare che la somma dei quadrati di due numeri reali di assegnato prodotto $p > 0$: *a*) decresce quando decresce il valore assoluto della differenza dei due numeri, *b*) raggiunge il valore minimo quando i due numeri sono uguali. Dedurre che fra i rettangoli di data area il quadrato ha la diagonale minima.

4) Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso [-1; 1]. Indicati rispettivamente con m e M il minimo e il massimo di $f(x)$ nell'intervallo assegnato si dimostrino le disuguaglianze $2m \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx \leq 2M$. Si dia un esempio di funzione per la quale almeno una delle disuguaglianze diventa un'uguaglianza e un secondo esempio di funzione per la quale entrambe le disuguaglianze sono soddisfatte in senso stretto.

Sessione suppletiva

1) Data una circonferenza di raggio unitario, si scrivano, in un sistema di assi coordinati opportunamente scelto, le equazioni delle cubiche ad essa bitangenti e passanti per il centro e per gli estremi di un diametro della circonferenza stessa. Se ne disegnino i grafici. Si calcolino le aree delle regioni di piano in cui le curve ottenute dividono il cerchio.

2) In un sistema di assi cartesiani si consideri la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 2$ e la sua simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = 2$. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e si scriva l'equazione della circonferenza in essa inscritta (bitangente alle due curve).

3) Data una circonferenza di diametro $AB = 2r$, si determini a quale distanza dal centro deve essere condotta la corda *CD* perpendicolare ad *AB* in modo che la differenza tra il triangolo *ACD*, contenente il centro, e il triangolo *BCD* abbia valore massimo. Si indichi la costruzione grafica della soluzione.

4) Si dimostri il teorema di unicità del limite di una funzione in un punto.

1987 Sessione ordinaria

1) In un sistema di assi cartesiani ortogonali è assegnata la famiglia di linee di equazione $ax^2 + (1 - 3a)x - y - 3 = 0$. Si individuino in tale famiglia la retta r e le due parabole C' e C'' che con la stessa retta formano ciascuna una regione finita di piano avente area 9/2. Si dimostri che le due parabole sono congruenti. Si scriva inoltre l'equazione della retta parallela all'asse delle ordinate tale che le tangenti a C' e a C'' nei punti d'intersezione di essa con le stesse parabole siano parallele.

2) Si studi la funzione $y = 3x - x^3$ e se ne disegni il grafico. Si sottoponga la curva alla trasformazione $x = mX$ ($m \neq 0$), $y = nY$ ($n \neq 0$) e si determinino i coefficienti m ed n in modo che il segmento congiungente gli estremi relativi della curva trasformata risulti della stessa lunghezza e perpendicolare al segmento congiungente gli estremi relativa della curva assegnata.

3) In un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri la funzione $y = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ e se ne disegni il grafico. Considerato l'arco AB della curva, essendo A il punto di flesso e B quello a tangente parallela all'asse delle ordinate, si determini il volume del solido ottenuto dalla rotazione della regione finita di piano, compresa tra l'arco AB, la retta OA e l'asse delle ascisse, di un intero giro attorno all'asse medesimo.

4) In un sistema di assi cartesiani ortogonali si scriva l'equazione della retta r' simmetrica, rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, di una generica retta r di equazione $y = mx$. Si individui la coppia di rette r ed r' tali che il triangolo isoscele formato da esse e da una perpendicolare alla bisettrice considerata abbia l'altezza uguale alla base.

Sessione suppletiva

1) In un sistema di assi cartesiani ortogonali si considerino le curve di equazione $x^3 + bx^2 + cx + y + d = 0$. Si individuino tra esse quelle che sono tangenti nell'origine delle coordinate all'asse delle ascisse e tali che l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dall'asse medesimo sia 4/3. Si disegnino le curve ottenute e si dimostri che sono congruenti.

2) In un sistema di assi cartesiani ortogonali si consideri la parabola C di equazione $y = -x^2 + 4x - 3$. Sottoposta la curva alla trasformazione $x = mX$ ($m > 0$), $y = nY$ ($n > 0$) si determinino i coefficienti m ed n in modo che il rettangolo circoscritto al segmento parabolico di C determinato dall'asse delle ascisse si trasformi in un quadrato equivalente. Si calcoli l'area dello stesso segmento parabolico.

3) Si studi la funzione $y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{2x^2}$ e se ne disegni il grafico. Dette A e B le intersezioni della curva con l'asse delle ascisse si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalle parallele per A e per B al suo asintoto obliquo.

4) In un sistema di assi cartesiani ortogonali sono assegnate l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$ e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Siano A il punto comune alle due curve di ascissa negativa, B un punto della circonferenza di ordinata positiva, H la proiezione di B sull'asse delle ascisse e P il punto d'intersezione del segmento BH con l'ellisse. Indicato con α l'angolo $B\hat{A}H$, si esprimano in funzione di esso le coordinate di B, H e P e si determini il valore di α per cui l'area del triangolo AHP è estrema.

1988 Sessione ordinaria

1) Si considerino la funzione $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2}$ e la sua funzione primitiva $F(x)$ che assume lo stesso valore di $f(x)$ per $x = 1$. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) si traccino le curve di equazione $y = f(x)$ e $y = F(x)$ e si determinino le equazioni delle tangenti nei loro punti comuni. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e dalla retta di equazione $x = -2$.

2) In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono dati i punti $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3)$. Si consideri la trasformazione $X = 2x - 2$, $Y = y + 1$ e siano A', B', C' i punti trasformati di A, B, C. Si verifichi che i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono equivalenti. Considerata la parabola γ, con asse verticale parallelo all'asse delle ordinate e passante per A, B, C, e la retta r passante per A parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, e detti γ' ed r' i corrispondenti di γ e di r nella trasformazione assegnata, si verifichi che anche le regioni finite di piano delimitate rispettivamente da γ e da r e da γ' e da r' sono equivalenti.

3) Considerato il triangolo ABC avente i lati $\overline{CA} = a$ e $\overline{CB} = 2a$, si costruisca, da parte opposta a C rispetto alla retta AB, il triangolo rettangolo ABD il cui cateto BD sia uguale alla metà del cateto AB. Si studi come varia l'area del quadrangolo $ADBC$ al variare dell'angolo $A\hat{C}B$ e si calcoli il perimetro di detto quadrangolo quando la sua area è massima.

4) Si dimostri, avvalendosi della definizione di derivata come limite del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente, che la derivata della funzione $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ è la funzione $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$ e si generalizzi la questione per la funzione $f(x) = \operatorname{sen}^n x$ con n intero positivo.

Sessione suppletiva

1) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a > 0)$ in modo che la curva da essa rappresentata in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sia simmetrica rispetto all'origine, abbia in essa per tangente la bisettrice del 2° e 4° quadrante e sia tale che l'area delle regioni finite di piano delimitate dalla stessa curva e dalla retta congiungente i suoi punti di massimo e minimo relativi sia 1/2. Se ne disegni il grafico.

2) In un piano cartesiano ortogonale si considerino la circonferenza di centro nell'origine degli assi e raggio r e le parabole aventi per asse di simmetria l'asse delle ordinate e tangenti alla stessa circonferenza ciascuna in due punti la cui retta congiungente abbia dal centro distanza uguale a metà del raggio. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla circonferenza e da una delle due parabole ottenute.

3) Si considerino una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$ e la retta t parallela alla retta AB e tangente alla semicirconferenza nel punto C. Detti D, E, F i punti d'intersezione di una perpendicolare al diametro AB rispettivamente con la semicirconferenza, con la retta t e con lo stesso diametro, si studi come varia il rapporto delle aree dei triangoli OFD e DCE al variare dell'angolo DOC.

4) Si enunci il teorema di Rolle e si verifichi che esso non è valido per la funzione $f(x) = |x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$; quale delle ipotesi dello stesso teorema viene a mancare?

1989 Sessione ordinaria

1) Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ e la sua funzione derivata $f'(x)$, si traccino, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), le curve di equazione $y = f(x)$ e $y = f'(x)$. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla congiungente i punti rappresentanti gli estremi relativi delle due funzioni, dalla curva di equazione $y = f'(x)$ e dalla parallela all'asse delle ordinate passante per il punto in cui questa curva incontra l'asse delle ascisse.

2) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnato il fascio di linee di equazione $y = (a + 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1$. Dopo aver verificato che tutte le linee passano per due punti, di cui uno di ascissa nulla, si determinino:
a) l'equazione della retta r del fascio;
b) i parametri a' e a'' delle linee del fascio simmetriche rispetto alla retta r ed aventi, nel punto comune di ascissa nulla, tangenti fra loro perpendicolari;
c) l'area della regione finita di piano delimitata dalle linee così ottenute.

3) In un piano sono assegnati una circonferenza di centro O e raggio r ed un punto A tale che $\overline{OA} = 2r$; si conducano per A due rette a e b tali che siano a perpendicolare alla retta OA ed $\hat{ab} = \pi/4$. Si determini sulla circonferenza il punto P tale che, condotte per esso la parallela alla retta a, che incontra la retta b nel punto M, e la parallela alla retta b, che incontra la retta a nel punto N, la somma $s = \overline{PM} + \overline{PN}$ assuma il valore minimo. Si costruisca geometricamente l'angolo $A\hat{O}P$, essendo P il punto trovato.

4) Delle funzioni $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ e $g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ una non verifica nell'intervallo [-1; 2] tutte le ipotesi del teorema di Lagrange (o del valore medio). Si dica per quale delle due ciò avviene e si giustifichi l'affermazione. Si determinino per l'altra funzione i valori della variabile indipendente la cui esistenza è assicurata dal teorema stesso.

Sessione suppletiva

1) Si studi la funzione $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ e si tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), la curva di equazione $y = f(x)$. Si calcolino le aree delle regioni di piano comprese tra la curva e l'asse delle ascisse.

2) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono assegnati i punti $A(4; 0)$ e $B(2; 0)$ e la retta r per B di coefficiente angolare -4/3. Si scrivano le equazioni delle due circonferenze tangenti in A all'asse delle ascisse e tangenti alla retta r. Indicati con C e C' i centri delle due circonferenze e con D e D' i rispettivi punti di contatto di queste con la retta r, si determinino l'area e il perimetro del quadrilatero $CDD'C'$. Si dimostri che i triangoli DAD' e CBC' sono simili e se ne dica il rapporto di similitudine.

3) Per il vertice A di un triangolo isoscele ABC di lato $\overline{AB} = a$ e di base $\overline{BC} = a\sqrt{3}$ si conduca la retta non secante il triangolo tale che, condotte su di essa dai vertici B e C rispettivamente le perpendicolari BD e CE, risulti massimo il perimetro del quadrilatero $BCED$.

4) Si verifichi che il triangolo, formato da una tangente qualsiasi ad un'iperbole equilatera e dagli asintoti, ha area costante e che il punto di contatto P della tangente è punto medio del segmento di tangente avente gli estremi A e B sugli asintoti. Si calcolino le aree delle regioni finite di piano comprese fra l'iperbole, la tangente in P e le parallele per A e per B rispettivamente agli asintoti cui essi non appartengono.

1990 Sessione ordinaria

Il candidato svolga, a scelta, due dei seguenti quesiti:

1) Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AC} = 2r$ e centro *O*, tracciare la semiretta uscente da *A*, perpendicolare ad *AC* e giacente rispetto ad *AC* dalla stessa parte della semicirconferenza. Detto *M* un punto generico su tale semiretta, indicare con *x* la distanza di *M* da *A*. Da *M* staccare l'ulteriore tangente in *B* alla semicirconferenza. Detta *K* l'intersezione della semicirconferenza con il segmento *OM*, determinare l'area *y* del quadrilatero *ACBK* in funzione di *x*. Determinare il valore di *y* quando *x* tende e a +∞.

2) Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla retta $y = 37/12$ e passanti per $A(0; 19/12)$ ed il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ e passanti per $B(2; 2)$. Calcolare quindi l'area della parte di piano racchiusa dalle due curve.

3) Tracciare il grafico della funzione $y = xe^{-x}$. La funzione data rappresenti per $x \geq 0$ la legge oraria del moto di un punto che si muove lungo una semiretta (*x* rappresenti il tempo e *y* la distanza del punto *P* dall'origine della semiretta su cui si muove). Determinare in quale istante *P* raggiunge la massima velocità, in quale istante la velocità è nulla e in quale istante l'accelerazione è nulla.

Sessione suppletiva

1) Data la parabola $y = 4x - x^2$ e la retta $y = k$ (con $k \geq 0$) che intercetta sulla parabola i due punti *A* e *B*, determinare la superficie del triangolo *OAB* (ove *O* è l'origine degli assi cartesiani) e studiarne l'andamento al variare di *k*. In particolare determinare per quale valore di *k* la superficie è massima. Calcolare quindi il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse del tratto di curva rappresentante la funzione studiata per $0 \leq k \leq 4$.

2) Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$ con centro *O* e raggio *OT* perpendicolare ad *AB*, da un generico punto *H* di *AB* tracciare la perpendicolare ad *AB* fino ad intersecare la semicirconferenza in *P* e da *P* il segmento *PK*, con *K* appartenente al segmento *OT*, tale che l'angolo $K\hat{P}O$ sia uguale all'angolo $O\hat{P}H$. Indicata con *x* la lunghezza del segmento *OH*, determinare la lunghezza *y* del segmento *OK* in funzione di *x*. Studiare l'andamento della funzione $y = f(x)$.

3) Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$ e centro *O*, tracciare le semirette perpendicolari ad *AB* sia in *A* sia in *B* dalla stessa parte della semicirconferenza. Indicare con *C* il punto della perpendicolare ad *AB* in *B* tale che sia $\overline{BC} = 1$. Preso un generico punto *T* sulla perpendicolare ad *AB* in *A*, indicare con *D* l'intersezione del segmento *TO* con la semicirconferenza. Posto $\overline{TA} = x$, determinare la superficie *y* del quadrilatero *ABCD* in funzione di *x* e studiarne l'andamento. Determinare, in particolare, il valore di *x* per cui la superficie assume il valore massimo. Indicare come si possa costruire con riga e compasso il segmento *TA* per cui l'area del quadrilatero è massima.

1991 Sessione ordinaria

1) In un piano cartesiano ortogonale *Oxy* si consideri il punto $A(2x, 0)$. Si trovi il luogo L del punto $B(x, y)$ tale che il triangolo OAB abbia perimetro $2p$ e si determini l'area della regione finita di piano delimitata dal luogo stesso. Se B_0 è il punto di L del primo quadrante la cui ascissa è $p/4$ ed A_0 il terzo vertice del triangolo relativo, si calcoli l'area del triangolo OA_0B_0. Si individuino inoltre le altre 7 posizioni di B tali che il triangolo OAB sia equivalente ad OA_0B_0.

2) Si consideri in un piano cartesiano ortogonale *Oxy* la famiglia di parabole tangenti all'asse delle ascisse nel punto $A(1, 0)$. Detto B il punto d'incontro della generica parabola con l'asse delle ordinate, si studi come varia, al variare della parabola, l'area della regione finita di piano compresa tra la parabola stessa e la retta passante per B, parallela alla bisettrice del secondo quadrante, determinandone in particolare i valori estremi relativi.

3) Si considerino due circonferenze di centri A e A' e, rispettivamente, di raggi 9 e 1, tangenti esternamente nel punto O. Sia r la tangente comune in O ed s una retta tangente ad entrambe le circonferenze nei punti B e B'. Detto C il punto d'intersezione delle rette r ed s, si dimostri che i triangoli ACA' e BOB' sono rettangoli e si calcoli il rapporto delle loro aree.

Sessione suppletiva

1) In un piano cartesiano ortogonale *Oxy* si consideri nel primo quadrante la circonferenza di raggio unitario tangente ai due assi coordinati. Detta r una retta passante per l'origine e secante la circonferenza nei punti A e B si studi come varia, al variare di r, l'area del triangolo ABC, essendo C il centro della circonferenza, e si determinino in particolare le due rette per cui detta area assume valore massimo.

2) Si disegni in un piano cartesiano ortogonale *Oxy* la curva C di equazione $y = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 1}}{x}$ e si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse delle ascisse la regione finita di piano compresa tra l'arco della curva C i cui estremi sono i punti di ascissa $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e 1 e le rette tangenti a C negli estremi stessi.

3) In un piano cartesiano ortogonale *Oxy* si considerino il punto $A(-1, 0)$ e la circonferenza C di centro $B(1, 0)$ e raggio $r > 2$. Si determini il luogo del punto P appartenente al raggio BT, al variare di T sulla circonferenza tale che sia $\overline{PT} = \overline{PA}$. Dopo aver dimostrato che detto luogo è un'ellisse di fuochi A e B si calcoli per quale valore di r la parte di piano da essa limitata è equivalente ad 1/16 del cerchio assegnato.

1992 Sessione ordinaria

Il candidato svolga, a scelta, due dei seguenti quesiti:

1) Presi due vettori $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ non paralleli e con lo stesso punto di applicazione *O*, sia $\vec{OA} = 2\vec{a}$ e $\vec{OB} = \vec{b}$. Tracciare il vettore $\vec{BC} = \vec{a}$ e congiungere *O* con *C*. Il punto *P* divida il segmento *OC* in due parti tali che $\vec{OP} = 2\vec{PC}$. Dimostrare che i punti *A*, *P*, *B* sono allineati (è allo scopo sufficiente dimostrare che i due vettori $\vec{AP}$ e $\vec{PB}$ sono multipli di uno stesso vettore). Posto $\vec{a} \perp \vec{b}$ e $|\vec{a}|$ = 1 e fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di centro *O* con ascissa parallela ed equiversa ad $\vec{a}$ e ordinata parallela ed equiversa a $\vec{b}$, trovare $|\vec{b}|$ affinché i due segmenti *OC* e *AB* siano perpendicolari. Trovare, in questo caso, le due parabole con asse parallelo all'asse delle *y* e passanti rispettivamente la prima per *O*, *P* ed *A* e la seconda per *B*, *P* e *C*. Verificare che le due parabole sono tra loro tangenti in *P*. Calcolare infine l'area della parte finita di piano racchiusa tra le due parabole e l'asse delle *y*.

2) La funzione *f*(*x*) = $\left(2x^3 - 4x\right)e^{-x^2}$ rappresenti, in opportune unità di misura, la forza a cui è soggetto un punto *P* libero di muoversi lungo l'asse *x*. Sapendo che la forza è data da $f(x) = -\frac{dE(x)}{dx}$ dove *E*(*x*) è l'energia potenziale, trovare la funzione *E*(*x*) e rappresentarla avendo posto *E*(0) = -1. Per quali valori di *x* il punto *P* è in equilibrio, ossia per quali valori di *x* la forza è nulla? Per tali valori di *x* l'energia potenziale quale valore assume?

3) Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro *O*, tracciare una semiretta *s* uscente da *O* ed intersecante γ in un punto *Q*. Indicato con *P* un generico punto di *s* esterno alla circonferenza γ, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano *A* e *B* i punti di tangenza. Indicata con *x* la lunghezza del segmento *PQ*, trovare il limite per *x* tendente ad infinito del rapporto $k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}$.
Studiare quindi la funzione *y* = *f*(*x*), dove *f*(*x*) = k^2 e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani.

Sessione suppletiva

1) Studiare la funzione *y*(*x*) = $\cos x \cdot e^{-x}$. Essa, in opportune unità di misura, rappresenti la corrente elettrica di scarica di un condensatore attraverso una impedenza, essendo *x* il tempo. In tal caso la carica *Q* inizialmente presente sulle armature del condensatore è data da $Q = \int_0^\infty y(x)\,dx$.
Calcolare il valore di *Q*.

2) In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ inscrivere il triangolo *ABD* retto in *D*. Tracciare la bisettrice dell'angolo $D\hat{A}B$: tale bisettrice intersechi il segmento *BD* in *E*. Indicato con *x* l'angolo $B\hat{A}E$, determinare il rapporto *y* tra la lunghezza del segmento *BE* e la lunghezza del segmento *BD*: $y = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$. Calcolare il rapporto *y* per *x* tendente a 0, quindi rappresentare la funzione *y* = *f*(*x*).

3) Dati i due punti *A*(-1, 0) e *B*(1, 0) determinare il luogo dei punti *P*(*x*, *y*) tali che $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$ con *k* > 0. Descrivere le caratteristiche delle curve trovate come luogo. Trovato, per *k* ≠ 1, il centro di tali curve in funzione di *k*, studiare l'andamento dell'ascissa del centro di tali curve al variare di *k*.

1993 Sessione ordinaria

Il candidato svolga, a scelta, due dei seguenti quesiti:

1) La funzione $f(x)$ sia rappresentata per $x \leq 1$ da $y = -3x^2 + Hx$ e per $x > 1$ da $y = K/x^2$. Determinare le costanti H e K in modo che la funzione $y = f(x)$ e la sua derivata siano continue in $x = 1$. Rappresentare la funzione così trovata e calcolarne l'integrale definito tra 0 e $+\infty$.

2) Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O, tracciare la circonferenza γ di raggio unitario e centro O. Detto punto A il punto di coordinate (1, 0), indicare con θ l'angolo formato da una generica semiretta uscente dall'origine con il semiasse positivo delle x e con P il punto in cui tale semiretta interseca γ ($P\hat{O}A = \theta$). Determinare in funzione di θ l'ordinata y del punto Q appartenente al semiasse positivo delle y tale che $\overline{PQ} = 2$. Descrivere - limitandosi all'uso della derivata prima - la funzione $y = f(\theta)$ trovata. Se P ruota sulla circonferenza γ con velocità angolare costante, il moto di Q quali caratteristiche presenta? Negli istanti in cui Q ha velocità nulla, P dove si trova?

3) Sia

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen} 2t \end{cases}$$

Esprimere y in funzione di x e rappresentare tale funzione che si presenta sotto la forma $y = \pm f(x)$. Individuare simmetrie e caratteristiche del grafico trovato. Calcolare l'area racchiusa dalla figura trovata. [L'integrale proposto è di facile esecuzione se si pone $\sqrt{1 - x^2} = z$].

Sessione suppletiva.

Il candidato svolga due dei seguenti quesiti:

1) In un sistema di assi cartesiani ortogonali siano $A(-1, -\sqrt{3})$ e $B(1, 1)$.
Determinare il punto P appartenente all'asse x tale che sia minima $y = n\overline{AP} + \overline{PB}$ ove si sia posto $n = \sqrt{2}$.
Tracciata la retta r perpendicolare all'asse x in P, verificare che, detti β l'angolo formato dalla semiretta PB con la retta r ed α l'angolo formato dalla semiretta PA con la retta r, è $\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = n$.

2) Studiare la funzione $y = \sqrt{x^3 - x^2}$; quali considerazioni si possono fare sui punti $x = 0$ e $x = 1$?

3) Studiare la funzione $f(x) = \left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{k - \cos x}\right|$ dopo aver determinato il valore di k in modo che la funzione abbia un massimo per $x = \pi/3$.
Supposto che la funzione rappresenti il valore assoluto dell'intensità (espressa in Newton) di una forza che agisca lungo l'asse delle ascisse (ove x rappresenti il valore numerico della distanza in metri), calcolare il lavoro fatto dalla forza quando il suo punto di applicazione si sposta dalla posizione $x = 0$ a $x = \pi$. (L'integrale è di facile esecuzione se si pone $k - \cos x = t$)

1994 Sessione ordinaria

Il candidato scelga a suo piacimento **due** dei seguenti problemi e li risolva:

1) Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), è assegnata la curva *k* di equazione $y=\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|$.

Disegnarne un andamento approssimato dopo aver verificato, fra l'altro, che essa ha due flessi.
Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta congiungente tali flessi e dalle tangenti inflessionali.
Calcolare inoltre l'area della regione piana delimitata da *k*, dall'asse *x* e dalla retta di equazione $2x - 3 = 0$.
Stabilire infine quale delle due aree precedenti è la maggiore.

2) Una piramide ha per base il triangolo *ABC*, isoscele e rettangolo in *A*, ed ha per altezza il segmento *AV*. Inoltre la faccia *VBC* forma un angolo di 45° col piano della base e lo spigolo *VB* è lungo $2h\sqrt{3}$, dove *h* è una lunghezza nota.
Calcolare la distanza del vertice *A* dal piano della faccia *VBC* e trovare per quale valore di *h* tale distanza vale $4\sqrt{2}$.
Verificato che questo valore di *h* è 4, con riferimento ad esso secare la piramide con un piano parallelo alla base *ABC* e, proiettato ortogonalmente il triangolo sezione sulla base stessa, esprimere il volume del prisma triangolare così ottenuto in funzione della sua altezza *x*.
Studiare, in rapporto alla questione geometrica, la funzione *f*(*x*) ricavata e tracciarne l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*).
Calcolare infine quanti, fra i punti della regione piana compresa fra il grafico di *f*(*x*) e l'asse *x*, escluso il contorno, hanno entrambe le coordinate intere.

3) Considerato un triangolo *ABC*, isoscele sulla base *BC*, indicare con *D* il piede della sua altezza condotta per *C* e costruire il triangolo *ECD*, isoscele sulla base *CD* e simile a quello dato, in modo che il punto *E* cada dalla stessa parte di *A* rispetto a *BC*. Sia $\overline{BC}=4$ e $\overline{CD}=\sqrt{3}$.

a) Dimostrare che l'angolo $E\hat{C}B$ è retto.
b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione della circonferenza *K* passante per i punti *A*, *C*, *D*.
c) Spiegare perché *K* passa pure per *E*.
d) Detto *F* il punto in cui *K* seca ulteriormente *CB*, calcolare le aree delle due regioni piane in cui il minore degli archi *DF* di *K* divide il quadrilatero *ABCE*.

Sessione suppletiva.

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1) Studiare le funzioni $y=x^3+1$ e $y=\sqrt{x^3+1}$ e disegnare i loro grafici, rispettivamente *K'* e *K''*, nello stesso piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*).
Successivamente, tra i segmenti intercettati, dalla regione piana *R* delimitata da *K'* e *K''*, su una parallela all'asse *y*, determinare quello di lunghezza massima.
Calcolare infine il volume del solido generato da tale regione *R* quando ruota di un giro completo intorno all'asse *x*.

2) Considerato il rettangolo *ABCD*, il cui lato *AB* è lungo *a*, condurre per *B* la perpendicolare alla retta *AC* e chiamare *H* ed *E* i punti in cui essa seca le rette *AC* e *AD* nell'ordine.

Condurre quindi per *H* la perpendicolare al piano della figura e su di essa prendere un punto *P* tale che $\overline{HP}=6\overline{AE}$.
Esprimere il volume della piramide, avente per vertice il punto *P* e per base il quadrilatero *HDEC*, in funzione della lunghezza *x* del segmento *BH*.
Studiare, indipendentemente dalla questione geometrica, la funzione *f*(*x*) fornita dall'espressione del volume suddetto quando *a* = 1 e disegnarne il grafico *G* in un piano cartesiano ortogonale (*Oxy*).
Calcolare infine l'area di ciascuna delle due regioni piane delimitate da *G* e dalla retta di equazione 4*y* - 9 = 0.

3) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), sono assegnate le curve di equazione $y=\frac{x-a}{2x-a}$ dove *a* è un parametro reale non nullo.
a) Dimostrare che esse hanno tutte in comune un punto *A* ed esso soltanto.
b) Tra le curve considerate, determinare quelle che intercettano un segmento di lunghezza $\frac{4}{3}\sqrt{10}$ sulla retta passante per *A* e avente coefficiente angolare 3.
c) Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle due curve trovate e dalla retta di equazione *x* = 1.

1995 Sessione ordinaria

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1) Considerato il triangolo equilatero *ABC*, chiamare: *C*', *C*" i punti che dividono il lato *AB* in tre parti congruenti (*AC*' < *AC*"); *A*', *A*" i punti che dividono il lato *BC* in tre parti congruenti (*BA*' < *BA*"); *B*', *B*" i punti che dividono il lato *CA* in tre parti congruenti (*CB*' < *CB*").
Indicare quindi con: *L* il punto intersezione dei segmenti *AA*' e *BB*"; *M* il punto intersezione dei segmenti *AA*' e *CC*"; *N* il punto intersezione dei segmenti *BB*' e *CC*"; *P* il punto intersezione dei segmenti *BB*' e *AA*"; *Q* il punto intersezione dei segmenti *CC*' e *AA*"; *R* il punto intersezione dei segmenti *CC*' e *BB*".
a) Dimostrare, con il metodo che si preferisce, che l'area dell'esagono *LMNPQR* è 1/10 di quella del triangolo *ABC*.
b) Ammesso che l'area di tale esagono sia $\frac{9}{10}h^2\sqrt{3}$, dove *h* è una lunghezza assegnata, calcolare il volume del solido generato dall'esagono quando ruota di mezzo giro intorno alla retta *NR*.
c) Supponendo nota la formula $V=\pi\int_a^b[f(h)]^2\,dx$, che fornisce il volume di un solido di rotazione, dimostrare le formule dei volumi di un cono e di un tronco di cono circolari retti.

2) Nel cubo di vertici *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* le facce *ABCD* e *EFGH* sono opposte ed i segmenti *AE*, *BF*, *CG* sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria.
Sullo spigolo *BF* prendere un punto *P* tale che $\overline{BP}=x$.
a) Verificare che la distanza *y* di *P* dalla diagonale *AG* è espressa dalla seguente funzione:
$y=\sqrt{\frac{2}{3}(x^2-x+1)}$.
b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, dopo aver trovato, tra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti.
c) Considerato infine il volume del solido generato, in una rotazione completa intorno all'asse *x*, dalla regione piana delimitata da tale grafico, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = h$ (con $h > 0$), calcolare per quale valore di *h* questo volume è $16/9\pi$.

3) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, è assegnata la curva *K* di equazione:

$$y=\operatorname{sen} x+\frac{1}{4\operatorname{sen} x}, \text{ con } -\pi < x < \pi.$$

a) Disegnarne l'andamento e stabilire, in particolare, se la curva ha flessi.
b) Calcolare l'area della regione piana limitata da *K* e dalla retta di equazione $y = 1$.
NB. Per il calcolo di una primitiva della funzione $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ si suggerisce di porre $\tan\frac{x}{2}=t$.

Sessione suppletiva.

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1) Nel parallelepipedo rettangolo di vertici *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* le facce *ABCD* ed *EFGH* sono opposte e i segmenti *AE*, *BF*, *CG* sono spigoli. Inoltre:

$$\overline{AB}=3x,\ \overline{AD}=4x,\ \overline{AE}=2a-x,$$

essendo *a* una lunghezza nota ed *x* una lunghezza incognita.
Chiamato *P* il piede della perpendicolare condotta da *A* alla retta *FH*, considerare il poliedro Σ

avente per vertici i punti *A*, *B*, *F*, *E*, *P*.
Calcolare il valore di x che rende massimo il volume di Σ, il valore di a per il quale questo volume massimo è uguale a $\frac{128}{75}$ (cm^3) e, infine, per tale valore di a, l'area della superficie del solido Σ di volume massimo.

2) Studiare la funzione $y=\sqrt[3]{x^2+1}$, e disegnarne il grafico *G* in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*.
Verificato che *G* ha due flessi, *F*' ed *F*'', calcolare l'area del triangolo di vertici *O*, *F*', *F*''. Trovare i due interi consecutivi entro i quali è compresa quest'area. Calcolare infine il volume del solido generato dal triangolo *OF*'*F*'' quando ruota di un giro completo intorno all'asse *x*.

3) E' assegnata l'equazione $y = -ax^2 + bx + c$, dove i coefficienti a, b, c sono numeri reali non negativi. Determinare tali coefficienti sapendo che la parabola *p*, che rappresenta l'equazione in un piano cartesiano ortogonale *Oxy*, interseca l'asse *x* nei punti *O*, *A* ed ha vertice nel punto *V* in modo che:
a) il triangolo *OAV* sia rettangolo,
b) il segmento parabolico individuato dalla corda *OA* generi un solido di volume $\frac{128}{15}\pi$, quando ruota di un giro completo attorno all'asse *x*.
Considerata poi la circonferenza tangente in *A* alla retta *AV* e passante per *O*, calcolare le aree delle due regioni piane in cui essa divide il segmento parabolico suddetto.

1996 Sessione ordinaria

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), sono assegnate le parabole di equazione: $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2$, dove *a* è un numero reale positivo. Tra di esse determinare la parabola *p* che, con la sua simmetrica *q* rispetto all'origine *O*, delimita una regione di area $\frac{128}{3}$. Constatato che, per la parabola *p* risulta $a = 2$, calcolare l'area del quadrilatero convesso individuato dagli assi di riferimento e dalle tangenti alle due parabole *p*, *q* nel loro punto comune di ascissa positiva. Considerato infine il quadrilatero convesso avente per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero precedente, dimostrare che si tratta di un parallelogramma e calcolarne l'area.

2) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), è assegnata la curva *k* di equazione: $y = \frac{x^2}{4 - x^3}$. Dopo aver studiato la funzione $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^3}$ (dominio, eventuali zeri ed estremi, asintoti di *k*), disegnare l'andamento di *k*. Indicata con *t* la tangente a *k* parallela all'asse delle ascisse distinta dall'asse stesso, calcolare l'area della regione piana delimitata da *k* e da *t*.
A completamento del problema, prendere in esame le due seguenti proposizioni:

Una funzione reale di variabile reale non derivabile in un punto non è continua in quel punto.

Una funzione reale di variabile reale non continua in un punto non è derivabile in quel punto.

Dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire una esauriente giustificazione della risposta.

3) Considerato il rettangolo *ABCD*, il cui lato *AD* è lungo 8*a*, dove *a* è una lunghezza nota, sia *M* il punto medio del lato AB. Sulla perpendicolare al piano del rettangolo condotta per *M*, prendere un punto *V* in modo che il piano del triangolo *VCD* formi col piano del rettangolo un angolo α tale che tg $\alpha = 3/4$. Mostrare che la superficie laterale della piramide di vertice *V* e base *ABCD* è costituita da due triangoli rettangoli e da due triangoli isosceli. Sapendo che l'area di tale superficie laterale è $92a^2$, calcolare la lunghezza di *AB*. Constatato che tale lunghezza è 5*a*, condurre un piano σ parallelo alla base della piramide e proiettare ortogonalmente su tale base il poligono sezione di σ con la piramide stessa, ottenendo in questo modo un prisma retto. Determinare la posizione di σ per la quale il volume di tale prisma risulta massimo. A completamento del problema, dimostrare che se i numeri reali positivi *x*, *y* variano in modo che la loro somma si mantenga costante allora il prodotto x^2y è massimo quando risulta $x = 2y$.

Sessione suppletiva.

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), sono assegnate le curve di equazione: $y = \frac{2x^2 + ax + b}{x^3}$, dove *a*, *b* sono parametri reali. Trovare quale relazione lega questi parametri quando le curve considerate hanno un punto di massimo ed uno di minimo relativi e stabilire a quali altre condizioni devono soddisfare *a* e *b* affinché tali punti, quando esistono, abbiano ascisse dello stesso segno. Tra le curve assegnate determinare la curva *k* avente gli estremi relativi nei punti *A*, *B* di ascisse 1 e 3 rispettivamente e disegnarne l'andamento. Calcolare infine l'area della regione piana delimitata dalla curva *k* e dalla retta $y = q$, dove *q* è l'ordinata del punto *B*.

2) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione: $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, dove a, b, c sono numeri reali. Determinare tra queste le due curve k_1 e k_2 che passano per l'origine e per il punto $A(2, 0)$ e sono tangenti all'asse delle ascisse rispettivamente in O e in A. Disegnare l'andamento di k_1 e k_2. Considerata la regione piana R delimitata dagli archi di k_1 e k_2 aventi gli estremi in O e in A, calcolarne l'area e trovare tra le sue corde parallele all'asse delle ordinate quella di lunghezza massima. Calcolare poi l'area del quadrilatero convesso avente per vertici gli estremi di questa corda e i punti O e A. Verificare che le equazioni delle due curve k_1 e k_2 si trasformano l'una nell'altra con la sostituzione $x = 2 - x'$, $y = - y'$ ed esprimere questa proprietà in termini geometrici.

3) Nel triangolo ABC, rettangolo in A, risulta: $\overline{AB} = a$, $\operatorname{sen} A\hat{B}C = \frac{4}{5}$, dove a è una lunghezza nota. Indicato con D un punto della semicirconferenza di diametro BC, non contenente A, esprimere l'area S del triangolo ABD in funzione dell'ampiezza x dell'angolo $B\hat{A}D$. Constatato che si ha $S = \frac{a^2}{6}(4\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x\cos x)$, studiare questa funzione e disegnarne l'andamento con riferimento alla questione geometrica. Utilizzare il disegno ottenuto al fine di calcolare per quali valori di x l'area S risulta uguale a ka^2, dove k è un parametro reale. Determinare infine il perimetro del triangolo ABD per il quale è massima l'area S.

1997 Sessione ordinaria

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1) In un piano sono assegnate una circonferenza *k* di raggio di lunghezza nota *r* ed una parabola *p* che seca *k* nei punti *A* e *B* e passa per il suo centro *C*. Inoltre l'asse di simmetria della parabola è perpendicolare alla retta *AC* e la corda *AB* è lunga quanto il lato del triangolo equilatero inscritto in *k*. Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (*Oxy*):

a) determinare l'equazione della parabola *p*;

b) calcolare il volume del solido generato, con una rotazione completa attorno alla retta *AC*, dalla regione piana delimitata dai segmenti di rette *AB* e *AC* e dall'arco *BC* della parabola *p*;

c) considerata la retta *t*, tangente alla parabola *p* e parallela alla retta *AB*, trovare la distanza delle rette *t* ed *AB*;

d) dopo aver dimostrato analiticamente che *p* e *k* non hanno altri punti comuni oltre ad *A* e *B*, calcolare le aree delle regioni piane in cui *p* divide il cerchio delimitato da *k*.

2) Sono assegnate le funzioni in *x*: $\dfrac{x^4 + ax^2 + b}{x^2 + 1}$ dove *a*, *b* sono parametri reali.

a) Fra tali funzioni indicare con *f*(*x*) quella per cui la curva *k* di equazione *y* = *f*(*x*), disegnata in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), soddisfi alle seguenti condizioni:

la retta di equazione *y* = 1 sechi *k* in due punti e sia tangente ad essa in un punto;

l'asse *x* sia tangente a *k* in due punti distinti.

b) Disegnare l'andamento di *k*.

c) Calcolare l'area della regione piana delimitata da *k* e dall'asse *x*.

d) Calcolare: $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)dx$.

3) Considerare i coni circolari retti in cui è uguale a una lunghezza assegnata la somma del doppio dell'altezza col diametro della base. Fra tali coni determinare quello di volume massimo e stabilire se ha anche la massima area laterale. Nel cono di volume massimo inscrivere poi il cilindro circolare retto avente la base sul piano di base del cono e volume massimo.

A completamento del problema, considerata una funzione reale di variabile reale *f*(*x*), definita in un intervallo *I*, e detta *f*(*x*) decrescente in *I* se $x' < x''$ implica $f(x') > f(x'')$ per ogni x', x'', dimostrare il seguente teorema:

Sia *f*(*x*) una funzione reale di variabile reale derivabile in un intervallo *I*. Condizione sufficiente ma non necessaria affinché *f*(*x*) sia decrescente in *I* è che risulti $f'(x) < 0$ per ogni *x* appartenente ad *I*.