Problema n. 1: CURVA NORD

Sei il responsabile della gestione del settore "Curva Nord" dell'impianto sportivo della tua città e devi organizzare tutti i servizi relativi all'ingresso e all'uscita degli spettatori, nonché alla sicurezza e all'assistenza agli spettatori stessi. La forma del settore sotto la tua gestione è una porzione di corona circolare come rappresentata in figura 1.

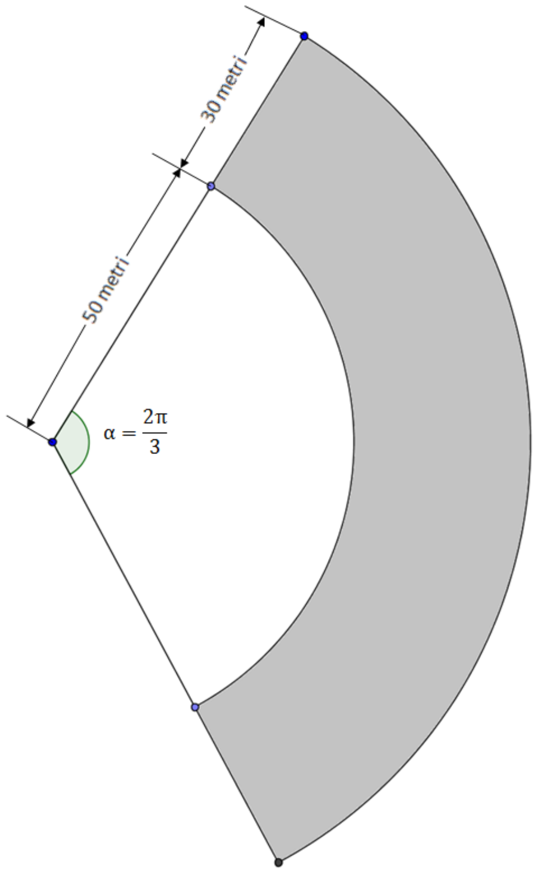

Figura 1

Tenendo presente che le normative di sicurezza emanate dal Comune prevedono un indice di affollamento massimo di 3,25 persone/m^2, e che il 9,5% della superficie della "Curva Nord" è inagibile in quanto necessita di lavori di manutenzione,

1) determina la capienza massima N_{max} attuale del settore "Curva Nord", approssimata alle centinaia.

La Polizia Municipale propone di aprire i cancelli di ingresso un'ora prima dell'inizio della manifestazione sportiva. È necessario non aprirli con troppo anticipo, per limitare i costi, ma anche evitare un afflusso troppo intenso, per motivi di sicurezza: la velocità massima di accesso degli spettatori non deve essere superiore a 350 ingressi al minuto. In base alle osservazioni degli anni precedenti, sai che l'andamento del numero di spettatori, aprendo gli ingressi un'ora prima dell'inizio della manifestazione, segue una curva come quella riportata in figura 2:

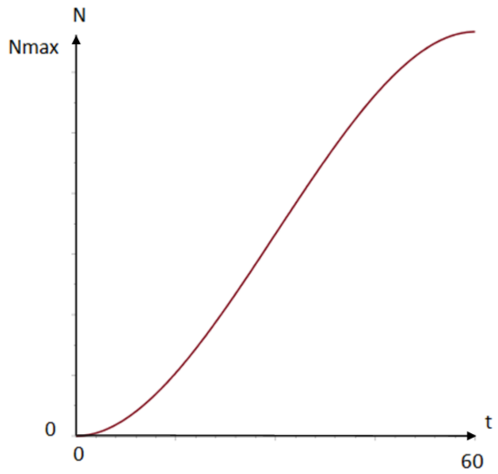

Figura 2

2) esprimendo il tempo t in minuti, determina il polinomio $p(t)$ di terzo grado che meglio riproduce questo andamento, ipotizzando che il numero di spettatori sia 0 all'apertura dei cancelli di ingresso (t = 0) e sia pari al numero massimo consentito N_{max} dopo un'ora ($t = 60$), e che la velocità di accesso sia 0 al momento dell'apertura iniziale degli ingressi, e sia ancora 0 dopo un'ora, quando l'afflusso termina e il settore è riempito completamente. Verifica che la funzione rispetti il vincolo di sicurezza sulla massima velocità di accesso degli spettatori nello stadio.

Al termine della manifestazione gli spettatori defluiscono dall'impianto; in base alle osservazioni degli anni scorsi ogni minuto esce dall'impianto il 5% degli spettatori presenti all'interno nel minuto precedente.

3) Determina la funzione che meglio rappresenta il deflusso degli spettatori, e, indicando con t=0 l'apertura dei cancelli e t_c (da determinare) l'istante in cui, durante il deflusso, nell'impianto restano meno di 100 spettatori, disegna il grafico della funzione che rappresenta il numero di spettatori presenti nell'impianto nell'intervallo $[0;\ t_c]$; ipotizza che l'impianto sia riempito alla massima capienza e che la manifestazione sportiva duri un'ora. Determina inoltre la massima velocità di deflusso degli spettatori dall'impianto.

Devi organizzare i servizi di assistenza e ristoro per gli spettatori, sulla base del numero medio di presenze nell'impianto.

4) Determina il numero medio di spettatori presenti nell'impianto, nell'intervallo di tempo dall'istante $t = 0$ (apertura dei cancelli) all'istante $t = t_c$

Problema n. 2: Il VASO

L'azienda in cui lavori produce articoli da giardino e sei stato incaricato di rivedere il disegno di un vaso portafiori realizzato da un tuo collega. Il vaso, di altezza h = 18 cm, è composto da due tronchi di cono aventi la base maggiore in comune e il disegno che ti è stato fornito (figura 1) ne rappresenta la sezione longitudinale:

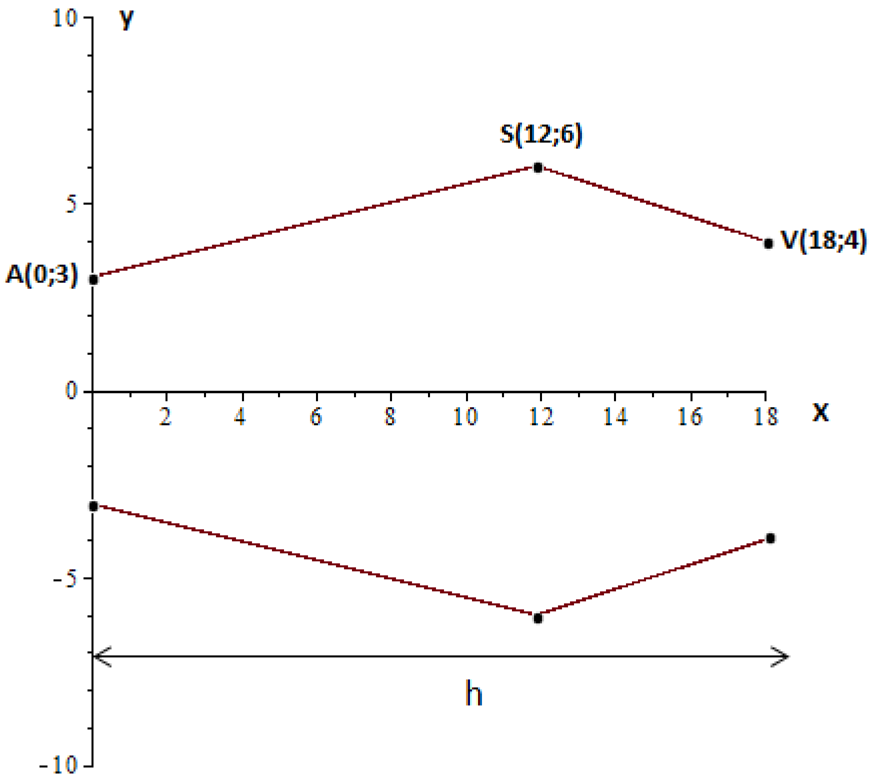

Figura 1

Nel riferimento cartesiano utilizzato in figura 1 l'unità corrisponde a 1 cm. Il direttore del tuo reparto ti chiede di:

1) verificare il valore del volume del vaso progettato dal tuo collega.

Se il volume risulta minore di 1,5 litri, bisogna rendere il vaso più alto, fino a fargli raggiungere il volume di 1,5 litri, lasciando però invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A, S e V, rendendo inoltre la forma meno spigolosa. Per chiarire meglio la sua richiesta, il direttore ti dà un suo disegno, modificato rispetto al precedente (figura 2).

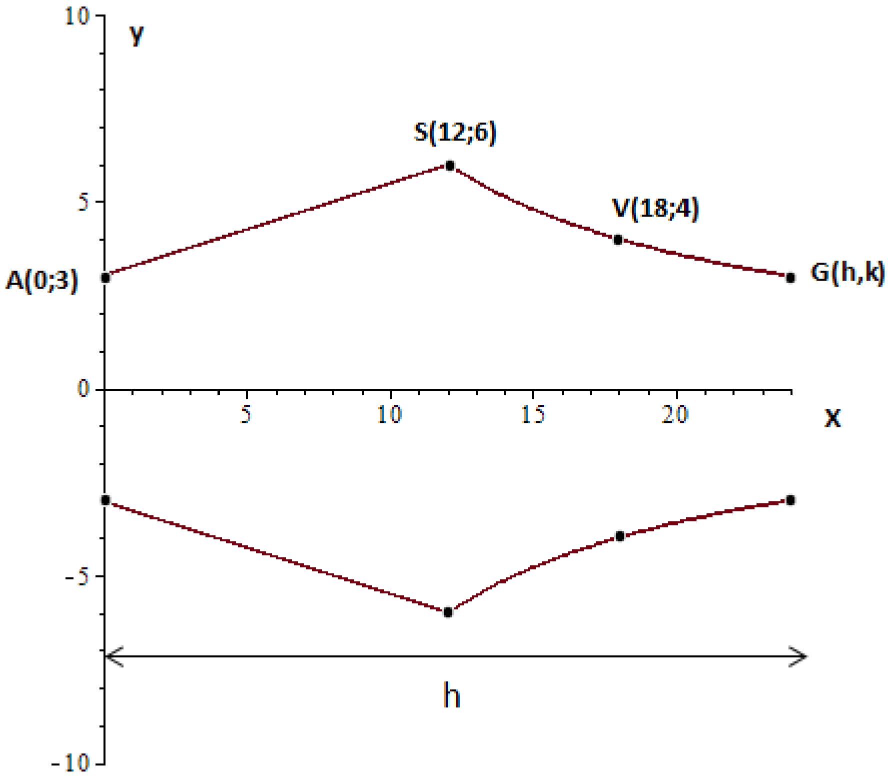

Figura 2

La curva passante per i punti S, V e G, disegnata dal direttore, può essere approssimata con un'iperbole di equazione $y=a/x$.

2) Determina, approssimando per eccesso al millimetro, i valori delle coordinate h e k del punto G che consentono di soddisfare la richiesta di modifica del vaso.

Dopo che un primo esemplare del vaso è stato prodotto, il responsabile della produzione fa rilevare che l'eccessiva spigolosità del profilo del vaso nel punto S ne rende costosa la produzione.

3) Considera la funzione il cui grafico è rappresentato nella figura 2, nel semipiano $y\geq 0$; descrivi la natura del punto S giustificando le tue affermazioni;

4) lasciando ancora invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A e S, individua la funzione razionale intera di secondo grado che consente di congiungere i punti A e S, eliminando il punto angoloso in S; disegna la nuova sagoma del vaso e individua il punto della curva AS in cui la pendenza del grafico è rimasta immutata rispetto alla sagoma precedentemente proposta.

Sezione Quesiti

QUESITO 1

Assegnata la funzione

$$y = e^{x^3 - 8}$$

1) verificare che è invertibile;

2) stabilire se la funzione inversa f^{-1} è derivabile in ogni punto del suo dominio di definizione, giustificando la risposta.

QUESITO 2

Data l'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = \frac{1}{2x - 1}$$

determinare la soluzione del problema di Cauchy, tenendo conto della condizione iniziale *y*(1)= 0

QUESITO 3

Di quale delle seguenti equazioni differenziali è soluzione la funzione $y = \ln(x - 3)$?

a) $(x - 3) \cdot y'' - (x - 3)^2 \cdot y' + 2 = 0$

b) $x \cdot y'' - (x - 3) \cdot y' + x + 2 = 0$

c) $(x - 3)^2 \cdot y'' - (x - 3) \cdot y' + 2 = 0$

d) $x^2 \cdot y'' + y' + 3 \cdot x - 9 = 0$

Giustificare la risposta.

QUESITO 4

Verificare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 12}$ e, nel caso in cui sia convergente, determinare la sua somma.

QUESITO 5

Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di numeri compresi tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri.

Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi? Giustificare la risposta.

QUESITO 6

La base di un solido, nel piano *Oxy*, è il cerchio avente come centro l'origine e raggio 3. Le sezioni del solido perpendicolari all'asse delle *x* sono quadrati.

Calcolare il volume del solido.

QUESITO 7

Trovare l'equazione del piano tangente alla superficie sferica avente come centro l'origine e raggio 2, nel suo punto di coordinate (1,1,*z*), con *z* negativa.

QUESITO 8

Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int (\arcsin(x) + \arccos(x))\, dx$$

e rappresentare graficamente la funzione primitiva passante per il punto $\left(\frac{2}{\pi}, 2\right)$.

QUESITO 9

Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2(x)}$$

QUESITO 10

In una stazione ferroviaria, fra le 8 e le 10 del mattino, arrivano in media ogni 20 minuti due treni.

Determinare la probabilità che in 20 minuti:

a) non arrivi alcun treno;

b) ne arrivi uno solo;

c) ne arrivino al massimo quattro.