Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di: MATEMATICA

ESEMPIO PROVA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Le centraline di controllo del Po a Pontelagoscuro (FE) registrano il valore della portata dell'acqua, ovvero il volume d'acqua che attraversa una sezione trasversale del fiume nell'unità di tempo. Come responsabile della sicurezza della navigazione fluviale in quel tratto del Po, devi valutare quando consentire la navigazione stessa, in considerazione delle condizioni atmosferiche e del livello dell'acqua.

Nel corso dell'anno le portate medie del Po (a Pontelagoscuro) sono di circa 34 milioni di m^3 al giorno in regime di magra, 130 milioni di m^3 al giorno in regime normale con un'oscillazione del 10% e 840 milioni di m^3 al giorno in regime di piena (fonte *deltadelpo.net*).

Durante un periodo di alcuni giorni di piogge intense, dalle rilevazioni registrate risulta che:

- nei primi due giorni dall'inizio delle misurazioni il valore della portata dell'acqua si è alzato dal valore di regime normale di 130 milioni di m^3 al giorno fino al valore massimo di 950 milioni di m^3 al giorno;
- nei giorni successivi la portata si è ridotta, tornando verso il valore di regime normale, inizialmente più velocemente e poi più lentamente.

1. Indicando con t il tempo, misurato in giorni, fissa un adeguato sistema di riferimento cartesiano in cui rappresentare il grafico dell'andamento della portata. Verifica se una delle seguenti funzioni può essere usata come modello per descrivere tale andamento, tenendo conto dei valori rilevati e del punto di massimo, giustificando con opportune argomentazioni sia la scelta che l'esclusione.

$$f(t) = a \cdot \cos(b \cdot t) + c$$

$$g(t) = a \cdot e^{-\frac{t^2}{b}} + c$$

$$h(t) = a \cdot t \cdot e^{1-b \cdot t} + c$$

$$a, b, c \in \Re$$

2. Individuata la funzione, determina i parametri in modo che siano verificate le condizioni sopra descritte per la portata e tracciane il grafico.
3. Studia la variazione della portata nel tempo e valuta dopo quanti giorni tale variazione raggiunge il suo minimo. Inoltre, dovendo prevedere quando autorizzare la ripresa della navigazione in condizioni di sicurezza, valuta, analiticamente o per via grafica, dopo quanti giorni la portata rientra nel limite di oscillazione del valore di regime normale.
4. Nel tempo trascorso tra l'inizio del fenomeno e il rientro nei limiti normali, qual è il volume di acqua che ha superato il valore di regime normale?

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di: MATEMATICA

ESEMPIO PROVA

PROBLEMA 2

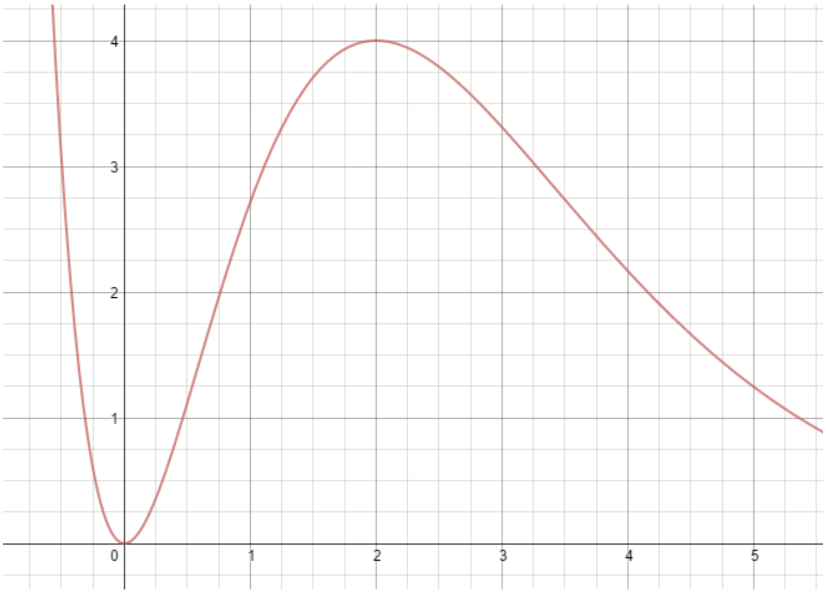

Figura 1: grafico *G*

Il grafico *G* in figura 1 rappresenta una funzione del tipo:

$$f(x) = x^k \cdot e^{(k-x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}, k > 1$$

1. determina il valore del parametro *k* affinché la $f(x)$ sia rappresentata dal grafico, motivando la tua risposta. Calcola inoltre le coordinate dei punti di flesso, le equazioni degli eventuali asintoti e le equazioni delle rette tangenti a *G* nei punti di flesso;
2. considera un triangolo avente i vertici, rispettivamente, nell'origine, nel punto della funzione $f(x)$ di ascissa *a*, e nel punto P sua proiezione sull'asse x. Determina il valore $a \geq 0$ per cui la sua area sia massima;
3. calcola l'area della regione piana delimitata da *G* e dall'asse *x* nell'intervallo [0,2] e determina il valore dell'errore percentuale che si verifica nel calcolo di tale area se nell'intervallo [0,2] si adotta, per approssimare $f(x)$, una funzione razionale di 3° grado della forma

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

   con $r(0) = f(0) = 0, \; r(2) = f(2) = 4, \; r'(0) = 0, \; r'(2) = 0$;

4. dimostra che, dette *A* e *B* le intersezioni tra le tangenti a *G* nei punti di flesso e l'asse *x*, *C* e *D* le proiezioni dei punti di flesso sull'asse *x*, si ha:

$$\overline{AB} = 2\overline{CD},$$

   per qualsiasi $k \in \mathbb{N}, k > 1$.

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di: MATEMATICA

ESEMPIO PROVA

QUESTIONARIO

1. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y = 3$ della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x^3 - x + 3$ e dalla retta stessa.

2. Verificare che la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione:

$$g(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

3. Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:
   a) qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?
   b) descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.

4. Utilizzando il differenziale calcola di quanto aumenta il volume di un cono retto avente raggio di base 2 *m* e altezza 4 *m* quando il raggio di base aumenta di 2*cm*.

5. Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.

6. Determinare la soluzione particolare della equazione differenziale $y' - x = xy$, verificante la condizione iniziale $y(0) = 2$.

7. Calcolare il valor medio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & 1 \le x \le 3 \\ e^{x-3} + 1 & 3 < x \le 6 \end{cases}$$

nell'intervallo [1, 6] e determinare il valore della *x* in cui la funzione assume il valore medio.

8. Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione *r(t)*. Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di: MATEMATICA

ESEMPIO PROVA

9. In un riferimento cartesiano nello spazio *Oxyz*, data la retta *r* di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano β di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di *k* la retta *r* e il piano *β* sono paralleli, e la distanza tra di essi.

10. Scrivere l'equazione della circonferenza *C* che ha il centro sull'asse *y* ed è tangente al grafico G_f di $f(x) = x^3 - 3x^2$ nel suo punto di flesso.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso del dizionario di italiano.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.