

# Insiemi numerici e intervalli

rispondi alle seguenti domande fornendo, quando necessario, degli esempi	
1	Dato un numero reale $r$ , qual è l'elemento di $\mathbb{Q}$ ad esso più vicino? [ Se $r \in \mathbb{Q}$ , è $r$ stesso; se invece $r$ è irrazionale la domanda non ha risposta. ]
2	Dati due numeri algebrici, esiste sempre tra essi un numero razionale? [ Sì, se i due numeri algebrici sono anche reali; altrimenti, la domanda non ha significato. ]
3	Fissato un numero razionale $q > 0$ , si considerino tutti gli intervalli del tipo $(p - q, p + q)$ al variare di $p \in \mathbb{Q}$ . Che insieme è l'unione di tutti questi intervalli? [ L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. ]
4	Riesci a trovare un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ non vuoto privo di numeri naturali? E privo di numeri interi? E privo di numeri razionali? [ L'intervallo $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ va bene per le prime due domande. Per la terza va bene $[\pi, \pi] = \{\pi\}$ . ]
5	E se l'intervallo non vuoto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ fosse aperto? Riusciresti ancora a trovare tutti e tre gli esempi? [ Il terzo no, poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ . ]
6	Si scelga $n \in \mathbb{N}$ . Che insieme è quello costituito dai numeri $mn$ , al variare di $m \in \mathbb{N}$ ? [ L'insieme dei multipli di $n$ . In particolare se $n = 0$ si tratta dell'insieme $\{0\}$ . ]
7	Si scelga $q \in \mathbb{Q}$ . Che insieme è quello costituito dai numeri $qr$ , al variare di $r \in \mathbb{R}$ ? [ $\mathbb{R}$ stesso, se $q \neq 0$ . Invece se $q = 0$ si tratta dell'insieme $\{0\}$ . ]
8	Sulla base dell'esercizio precedente, com'è in generale il prodotto di un numero razionale e di un numero irrazionale? [ Irrazionale, a meno che il numero razionale non sia 0. ]
9	Com'è la somma di due numeri trascendenti? Ed il loro prodotto? [ Non per forza trascendenti. Riesci a trovare degli esempi ricordando che $\pi$ , $-\pi$ e $1/\pi$ sono trascendenti? ]
10	Se invece $t$ è trascendente e $n$ naturale, come sono $t + n$ e $tn$ ? [ La somma è sempre trascendente; il prodotto è trascendente a meno che non sia $n = 0$ . ]
11	A che insieme appartiene, in generale, la somma di due numeri razionali? Riesci a trovare un caso in cui il risultato appartiene a $\mathbb{Z}$ ? E uno in cui appartiene a $\mathbb{N}$ ? [ All'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Basta l'unico esempio $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ ]
12	Il prodotto di due numeri irrazionali può essere razionale? E viceversa? [ Sì, poiché $(\sqrt{2})^2 = 2$ . Viceversa non è possibile. ]
13	A quale insieme numerico appartiene, in generale, la soluzione di un'equazione di II grado? [ All'insieme $\mathbb{A}$ dei numeri algebrici. ]
14	Ci sono numeri irrazionali non trascendenti? E numeri trascendenti non irrazionali? [ $\sqrt{2}$ è un esempio di numero irrazionale non trascendente. Non esistono irrazionali appartenenti a $\mathbb{Q}$ . ]
15	È vero che di ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ si può trovare il minimo? Cosa si può dire invece riguardo i sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ ? [ In $\mathbb{N}$ è vero, in $\mathbb{Z}$ invece no: si consideri ad esempio il sottoinsieme $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{Z}$ . ]
16	Qual è il massimo dell'insieme $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ ? [ Se $b \in \mathbb{Q}$ , il massimo è $b$ . Se invece $b$ è irrazionale il massimo non c'è. ]
17	Qual è il minimo numero reale non appartenente a $(1, +\infty)$ ? E a $[1, +\infty)$ ? [ Nel primo caso, 1; nel secondo caso, non è possibile trovarlo. ]
18	Qual è il minimo numero naturale non appartenente a $(-\infty, \sqrt{2})$ ? E il minimo numero reale? E il minimo numero razionale? [ 2; $\sqrt{2}$ ; non c'è un minimo razionale non appartenente a quell'insieme. ]

# Insiemi numerici e intervalli

19	Qual è il massimo numero naturale non appartenente a $(\frac{3}{4}, +\infty)$ ? E il massimo numero reale? E il massimo numero razionale?	[ 0; $\frac{3}{4}$ ; $\frac{3}{4}$ . ]
20	E se gli insiemi dei due esercizi precedenti fossero chiusi, rispettivamente a destra e a sinistra?	[ 2; non c'è; non c'è. 0; non c'è; non c'è. ]
21	Esistono degli $x$ appartenenti a $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{A})$ ?	[ No: i numeri razionali sono tutti algebrici, quindi i due insiemi sono disgiunti. ]
22	L'insieme $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ è finito o infinito? E l'insieme $\mathbb{N} \cap (0, 1)$ ?	[ Il primo è infinito, in particolare numerabile. Il secondo è finito, in particolare vuoto. ]
23	L'insieme delle radici quadrate dei numeri interi è contenuto in $\mathbb{R}$ ?	[ No, in quanto tra i suoi elementi c'è $\sqrt{-1} = i$ , che non appartiene a $\mathbb{R}$ . ]
24	L'insieme delle potenze di $i$ è infinito? Qual è il più piccolo insieme numerico in cui è contenuto?	[ Si tratta dell'insieme $\{i, -1, -i, 1\}$ , che è finito. Tutti i numeri che appartengono ad esso sono algebrici. ]
25	Qual è il minimo dell'insieme $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ ?	[Se $a$ appartiene a $\mathbb{Q}$ , il minimo è $a$ stesso. Altrimenti, non c'è minimo. ]
26	Che insieme è $(\mathbb{C} - \mathbb{A}) \cup (\mathbb{A} - \mathbb{R})$ ?	[Il complementare in $\mathbb{C}$ di $\mathbb{A} \cap \mathbb{R}$ . ]
27	È vero che l'unione dei numeri trascendenti e di quelli razionali dà $\mathbb{R}$ ?	[No. Ad esempio c'è $\sqrt{2}$ che appartiene a $\mathbb{R}$ pur non essendo né trascendente né razionale. ]
28	È vero che l'unione dei numeri irrazionali e di quelli algebrici dà $\mathbb{R}$ ?	[No. Ad esempio c'è $i$ che appartiene all'insieme essendo un numero algebrico, ma non a $\mathbb{R}$ . ]
29	Qual è l'insieme dei quadrati dei numeri reali?	[È $\mathbb{R}^+$ , cioè l'insieme di tutti i numeri reali non negativi. ]
30	Esiste un numero naturale che non sia il quadrato di alcun numero intero?	[ Sì. Ad esempio c'è 2 che, avendo radice quadrata irrazionale, non è il quadrato di alcun elemento di $\mathbb{Z}$ . ]
31	Esiste un numero reale che non sia il quadrato di alcun numero complesso? Ed esiste un numero complesso che non sia la radice quadrata di alcun numero reale?	[ No, poiché per ogni $r \in \mathbb{R}$ vale che $\sqrt{r} \in \mathbb{C}$ . Sì, poiché c'è $\frac{i+1}{\sqrt{2}}$ che ha come quadrato $i$ , che non appartiene a $\mathbb{R}$ . ]
32	È vero che $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}^-$ ?	[ No. Infatti in $\mathbb{Z}^-$ c'è anche lo 0. ]
33	Esiste un numero reale positivo che non sia il quadrato di alcun numero reale?	[No. Comunque considero $r \in \mathbb{R}^+$ , $\sqrt{r} \in \mathbb{R}$ . ]
34	Esiste un numero algebrico che non sia soluzione di alcun polinomio a coefficienti interi?	[No. Dato un polinomio che ha come radice un fissato $a \in \mathbb{A}$ , facendo il minimo comune multiplo dei suoi coefficienti (in generale razionali) si ottiene un polinomio a coefficienti interi che ha ancora $a$ come radice. ]
35	Che insieme è $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$ ? Che insieme è $\mathbb{Q} - \mathbb{R}^+$ ? Che insieme è $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^-$ ?	[ $\mathbb{Q}^+$ ; $\mathbb{Q}^- - \{0\}$ ; $\{0\}$ . ]
36	Che insieme è quello formato dai numeri $n/z$ con $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ? Che insieme è quello formato dai numeri $z/n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $z \in \mathbb{Z}$ ?	[ In entrambi i casi $\mathbb{Q}$ . ]
37	Che insieme è quello costituito da tutti i numeri naturali aumentati di 1?	[ È l'insieme dei numeri naturali strettamente positivi, cioè $\mathbb{N} - \{0\}$ . ]