

4. Elaborazione del modello matematico che descrive le spirali delle infiorescenze delle margherite e simili.

Supponiamo che la coppia $(r(\theta), \theta)$ esprima una relazione di proporzionalità diretta tra il raggio $r(\theta)$ e θ , cioè che sia $r(\theta) \propto \theta$, dove $r(\theta)$ denota la distanza del punto $P(r(\theta), \theta)$ dal polo $O(0,0)$. Detta k la costante reale di proporzionalità essa assume la forma

$$r(\theta) = k \cdot \theta \quad (1)$$

che esprime la variazione della distanza di $P(r(\theta), \theta)$ che ruota in verso antiorario attorno al centro $O(0,0)$ in funzione dell'angolo θ : r è la lunghezza del raggio dal centro O , o inizio, della spirale, e θ è l'angolo tracciato dal raggio che ruota intorno ad O . La (1) per $k = 1$ diventa $r(\theta) = \theta$ che è l'equazione polare della spirale di Archimede. Dal punto di vista fisico la spirale di Archimede è il luogo corrispondente alle posizioni nel tempo di un punto che si allontana da un punto fisso con velocità costante lungo una retta che ruota con velocità angolare costante ω_0 . Il punto $P(r, \theta)$ in coordinate polari può essere in generale descritto dall'equazione lineare più generale

$$r = a + k \cdot \theta$$

con a e b sono numeri reali. Al variare del parametro a il punto centrale della spirale si sposta verso l'esterno rispetto all'origine: se $a \geq 0$ verso $\theta = 0$, mentre se $a < 0$ verso $\theta = \pi$. Il parametro b controlla, invece, la distanza tra le spire. Se b è costante la distanza tra le spire è costante. Se $a = 0$ otteniamo $r(\theta) = k \cdot \theta$ (1); se $k = 1$ allora $r(\theta) = \theta$ e si ottiene l'equazione polare della spirale di Archimede il cui grafico è:

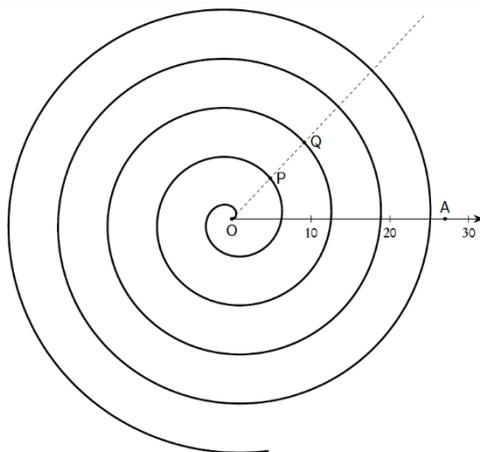


Figura 14. Spirale uniforme di Archimede di equazione polare $r(\theta) = \theta$ di centro O . La distanza tra due spire o bracci misurata lungo una semiretta avente origine nel polo O , è costante. Fonte. Spirali, eliche elicoidi di Luciano Battaia.

Osserviamo che $r(\theta) = \theta$ è l'equazione in coordinate polari analoga alla funzione identità $y = x$ in coordinate cartesiane, il cui grafico è la bisettrice del primo e terzo quadrante. La curva rappresenta il modello di legge di proporzionalità diretta che ha numerose applicazioni nella scienza. Ribadiamo che in $r(\theta) = \theta$ la variabile r denota la lunghezza del raggio dal centro, punto di inizio, della spirale, e θ è la posizione angolare del raggio. Come le scanalature in un disco fonografico, la distanza tra le spire successive della spirale è una costante pari a $2\pi a$, se la si misura in radianti.

In fig. 15 sono rappresentati i grafici delle spirali delle funzioni polari $r = k \theta^n$ per $k = 1$, $n = 2$ e $n = 3$.

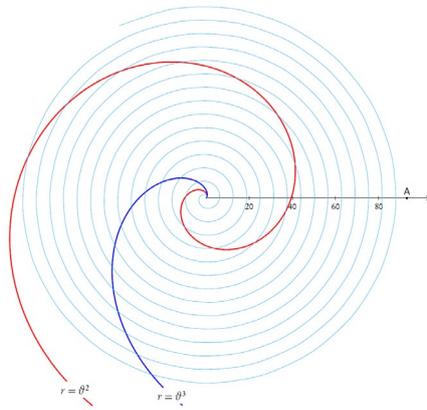


Figura 15. Grafici delle spirali di equazione polare $r = \theta^n$: la curva in rosso è il grafico di $r = \theta^2$, la curva in blu è il grafico di $r = \theta^3$. Fonte. L. Battaia. Spirali eliciche elicoidi.

Le spirali monocentriche più note, simili alla spirale di Archimede e chiamate spirali archimedee, sono:

1. la **spirale di Fermat**, che ha equazione polare $r = k \cdot \theta^{\frac{1}{n}} = k\sqrt[n]{\theta}$;
2. la **spirale iperbolica**, che ha equazione polare $r = k \cdot \frac{1}{\theta}$;
3. la **spirale logaritmica**, che ha equazione polare $r = k \cdot e^{b\theta}$: r è la distanza dal polo $O(0,0)$; θ è l'angolo prodotto dalla rotazione del raggio dall'asse x ; a , b e k sono costanti reali arbitrarie.

Qui di seguito sono riportati i grafici polari delle spirali suddette.

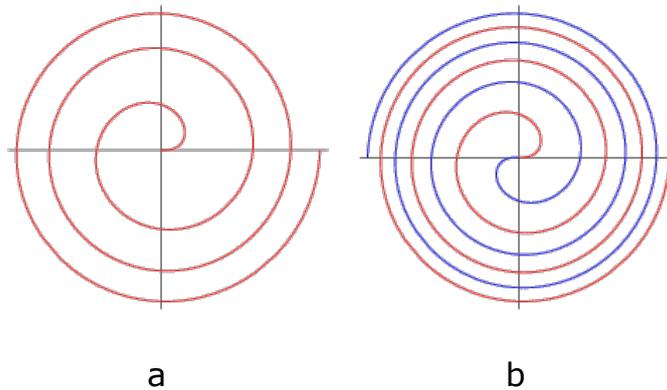


Figura 15. (a) Grafico polare della spirale di Fermat. (b) Sovrapposizione di due spirali di Fermat aventi versi opposti. Fonte. Wolfram Math World.

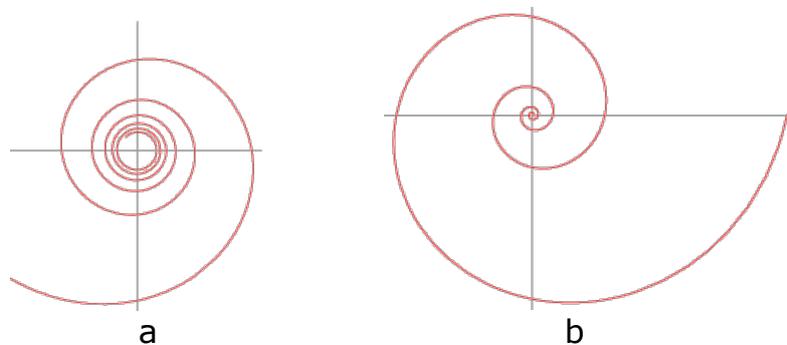


Figura 16. (a) Grafico della spirale iperbolica. (b) Grafico della spirale logaritmica
Fonte. Wolfram Math World.

Tra le spirali sopra definite quella più interessante per descrivere matematicamente le forme a spirale dei fiori tubulosi della margherita e di altre specie botaniche della

famiglia delle Asteracee è la spirale di Fermat. Il senso di questa affermazione sarà chiarito qui di seguito. A tal fine fissiamo l'attenzione sulla fig. 17 (a), dove sono stati disegnati 6 fiori tubulosi sui due bracci della spirale in parola. Il primo fiore è stato posto nel centro della spirale ed è contrassegnato con "1", il secondo e il terzo sono stati collocati sul primo braccio ed etichettati con "2" e con "3". Il quarto, il quinto e il sesto stati disposti sul secondo braccio, etichettandoli, rispettivamente, con "4", "5" e "6". L'angolo formato dai segmenti che congiungono due fiori consecutivi con il centro della spirale misura $137^{\circ} 30'$.

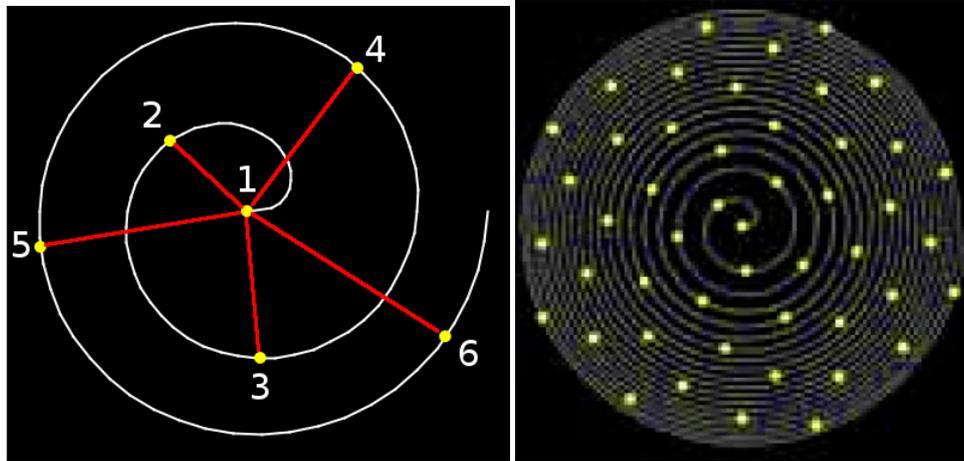


Figura 17. a b
 (a). Su una spirale in bianco di Fermat sono stati raffigurati 6 fiori tubulosi. I sei segmenti congiungono due fiori consecutivi col centro. L'angolo sotteso agli archi $\widehat{2-3}$, $\widehat{3-4}$ e $\widehat{5-6}$ misura $137^{\circ} 30'$ (b). Rappresentazione di circa 60 fiori tubulosi su una spirale di Fermat. Fonte. Quaderno 13, Orto botanico Trieste.

5. Il modello matematico

Una giustificazione matematica delle forme geometriche spiralfornite dei fiori tubulosi dell'Asterisco spinoso (fig.6), del Crisantemo campestre (fig.7), della Pratolina comune (fig.8), della Camomilla per tintori (fig.9) e delle infiorescenze di altre specie della famiglia delle Asteraceae, è fornita dal modello matematico qui proposto, fondato sulle due seguenti ipotesi:

- I. i fiori tubulosi che si sviluppano progressivamente dal centro del disco, si dispongono su una spirale di Fermat;
- II. le posizioni occupate dai fiori sono tali che i segmenti che congiungono due fiori che nascono consecutivamente col centro della spirale, formano sempre un angolo di circa $137^{\circ} 30'$.

La verifica della consistenza di questo modello può essere fatta simulando configurazioni spiralfornite di fiori che devono essere aderenti alle forme riscontrate nella realtà. A tal fine si parte da una spirale di Fermat e si mostra come i fiori tubulosi devono svilupparsi perché la forma geometrica finale sia proprio una spirale di Fermat. Notiamo che i 6 fiori tubulosi disegnati sui due bracci della spirale di figura 17 sono in accordo con la regola (II). Ebbene le regolarità nella disposizione dei fiori emergono solo quando i fiori sono molto numerosi, come si osserva nella fig. 18, nella quale i fiori sono circa 300. In questa situazione il modello proposto sembra in grado di descrivere un caso reale.

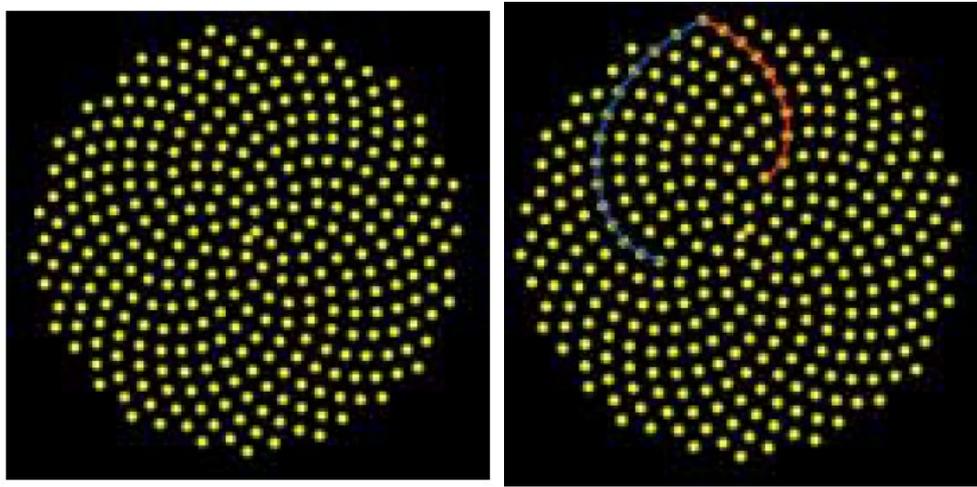


Figura 18.

a

b

- (a). Spirali formate da circa 300 fiori tubulosi che formano delle spirali.
 (b). In questo caso sono 21 in senso orario (blu) e 34 in senso antiorario (rosso).

Fonte. Quaderno 13. Orto botanico Trieste.

Si può dimostrare in via matematica che la curva rossa e la curva blu sono proprio spirali di Fermat,

$$r = k \cdot \theta^{\frac{1}{n}} = k\sqrt[n]{\theta}.$$

ciascuna con un diverso valore della costante k , che sono chiamate spirali secondarie.

Riepiloghiamo i punti chiave che il modello sopra descritto prevede:

- I. I fiori di una margherita, di un asterico spinoso o di una camomilla dei tintori si dispongono lungo una spirale di Fermat se è soddisfatta la regola che prevede che tra un fiore tubuloso e quello successivo del disco ci sia un angolo determinato di circa **137°30'**;
- II. La disposizione dei fiori che avviene con questa regola fa sì che si sviluppino in **modo naturale** delle **spirali di Fermat**, interamente visibili quando si osserva una infiorescenza. Alcune spirali sono orientate in senso orario e altre in senso antiorario, ma sono differenti pure in numero: quelle orarie sono più numerose di quelle antiorarie. Delle spirali formate con i 300 fiori tubulosi di fig. 18 quelle con andamento orario sono 21, mentre quelle con verso antiorario sono 34. Se le spirali ad andamento orario di un disco di fiori tubulosi sono 55 quelle antiorarie sono 89. I numeri 21, 34, 55, 89 sono numeri consecutivi della successione di Fibonacci.

A questo punto proseguiremo il discorso con l'obiettivo di fornire una giustificazione del modello matematico proposto, dando una risposta a ciascuna delle due domande:

- i. Perché i fiori tubulosi del disco si sviluppano secondo una spirale di Fermat?
- ii. Perché l'angolo di **137°30'** sembra giocare un ruolo così importante?

La risposta alla domanda (i) richiede di realizzare ed interpretare un semplice esperimento che qui sarà qui descritto. Si prende un foglio di carta assorbente e con un contagocce si lascia cadere una goccia di inchiostro nero sul foglio in un certo istante, t_0 , ad esempio alle 9.00. Man mano che l'inchiostro verrà assorbito dalla carta si formerà una macchia nera, che si suppone abbia una forma circolare. Il suo raggio r_1 , dopo un certo $\Delta t = t_1 - t_0$, diciamo un minuto, raggiungerà un valore massimo, quando tutto l'inchiostro è stato assorbito dalla carta. Supponiamo che sia $S_1 = \pi r_1^2$ l'area di questo disco. Tenendo fermi il contagocce e la carta, facciamo cadere una seconda

goccia di inchiostro. Dopo un altro minuto, cioè dopo 2 minuti dall'inizio dell'esperimento, il disco nero si sarà ingrandito e avrà un raggio r_2 , tale che la sua area sarà $S_2 = \pi r_2^2 = 2 \pi r_1^2 = 2 S_1$ perché è raddoppiato l'inchiostro. Quindi a $t_2 = 2$ min la macchia avrà area $2 S_1$. Se facciamo cadere una terza goccia di inchiostro, dopo un altro minuto, cioè al tempo $t_3 = 3$ min, il raggio sarà r_3 e la macchia avrà area $S_3 = \pi r_3^2 = 3 S_1$ e così via. Iterando il procedimento si avrà che dopo n minuti il raggio della macchia sarà $r_n = \pi r_n^2 = n S_1$.

Ricavando da queste equazioni le relazioni tra i raggi delle macchie si ottiene:

$$r_2 = r_1\sqrt{2}, r_3 = r_1\sqrt{3} \text{ e } r_n = r_1\sqrt{n}.$$

Dove r_n è il raggio della macchia dopo n minuti ed r_1 è costante in quanto è il raggio della prima macchia nera circolare prodotta dall'assorbimento della prima goccia.

Abbiamo così ottenuto una successione di circonferenze concentriche aventi raggi

$$r_1, r_2, r_3 \dots r_n.$$

In fig.19a sono rappresentate le prime sei circonferenze concentriche di questa successione, i cui raggi sono, rispettivamente, $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2 = \sqrt{4}, \sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$. In fig. 19b è rappresentato la spirale di Fermat di equazione polare $r = \sqrt{\theta}$. Il grafico di fig.9c illustra, invece, la sovrapposizione dei grafici 9a e 9b.

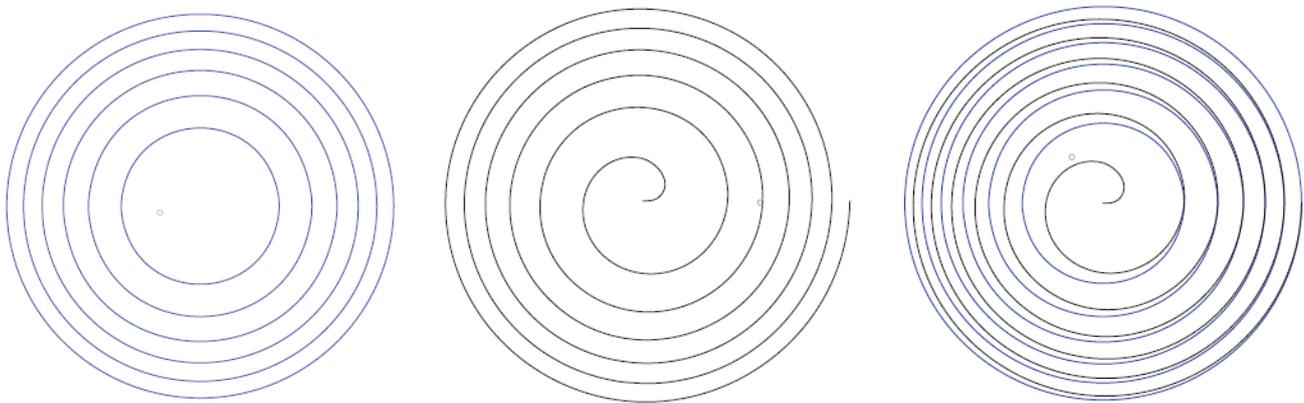


Figura 19. a b c
 (a) . Grafico dei sei cerchi concentrici di raggio, rispettivamente, $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2 = \sqrt{4}, \sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$.
 (b) . Grafico dei primi sei bracci della spirale di Fermat di equazione $r = \sqrt{\theta}$.
 (c) . Sovrapposizione dei grafici (a) e (b). Fonte quaderno 13, Orto botanico di Trieste.

L'equazione $r_n = r_1\sqrt{n}$ tra il raggio r_n della circonferenza n -esima e il raggio r_1 della prima esprime una relazione di proporzionalità diretta tra r_n e la \sqrt{n} con costante di proporzionalità r_1 . Essa è formalmente analoga alla equazione polare $r = k\sqrt{\theta}$ della spirale di Fermat, che esprime la proporzionalità diretta tra il raggio r e la radice dell'angolo θ . Quindi è plausibile assumere che le sei circonferenze della figura 19a siano un'approssimazione dei primi sei bracci della spirale di Fermat, rappresentata nella figura 19b. Notiamo che la macchia che si forma facendo gocciolare l'inchiostro sulla carta assorbente è un **fenomeno discreto**: si sviluppa di fatto in **intervalli costanti di tempo**. Quindi la macchia risulta racchiusa in un numero finito di circonferenze di dimensioni via via maggiori. Siccome le curve sul piano sono continue dobbiamo immaginare che l'inchiostro scenda in modo continuo. Da questa ipotesi è naturale e plausibile attendersi che:

- l'incremento della lunghezza della circonferenza o perimetro della macchia sul foglio debba variare in modo continuo;
- il raggio aumenti proporzionalmente alla radice quadrata del tempo, cioè $r = \sqrt{t}$.

Da ciò consegue che il raggio, istante per istante, sarebbe determinato da un punto che si muove su una spirale di Fermat. Questo ragionamento è, ovviamente, un'astrazione

matematica per passare dalla descrizione matematica discreta del fenomeno dell'espansione delle gocce di inchiostro sulla carta assorbente alla descrizione formale continua.

La goccia di inchiostro rappresenta, per analogia, i fiori prodotti dalla pianta in un certo intervallo di tempo. È plausibile aspettarsi che la pianta nello stesso intervallo di tempo produca sempre lo stesso numero di fiori, che devono sistemarsi sul disco del capolino, similmente a come l'inchiostro viene assorbito dalla carta.

L'analogia con lo sviluppo dei fiori di una margherita, ad esempio della Pratolina comune di fig. 8, con le premesse precedenti dovrebbe essere abbastanza naturale.

La rappresentazione della disposizione dei fiori tubolosi del disco nel modello matematico $r = \sqrt{\theta}$ in funzione dell'angolo formato tra due fiori consecutivi e il centro del disegno è riportata nei dieci disegni della fig. 20. In ciascuno dei 10 disegni i fiori sono circa un centinaio.

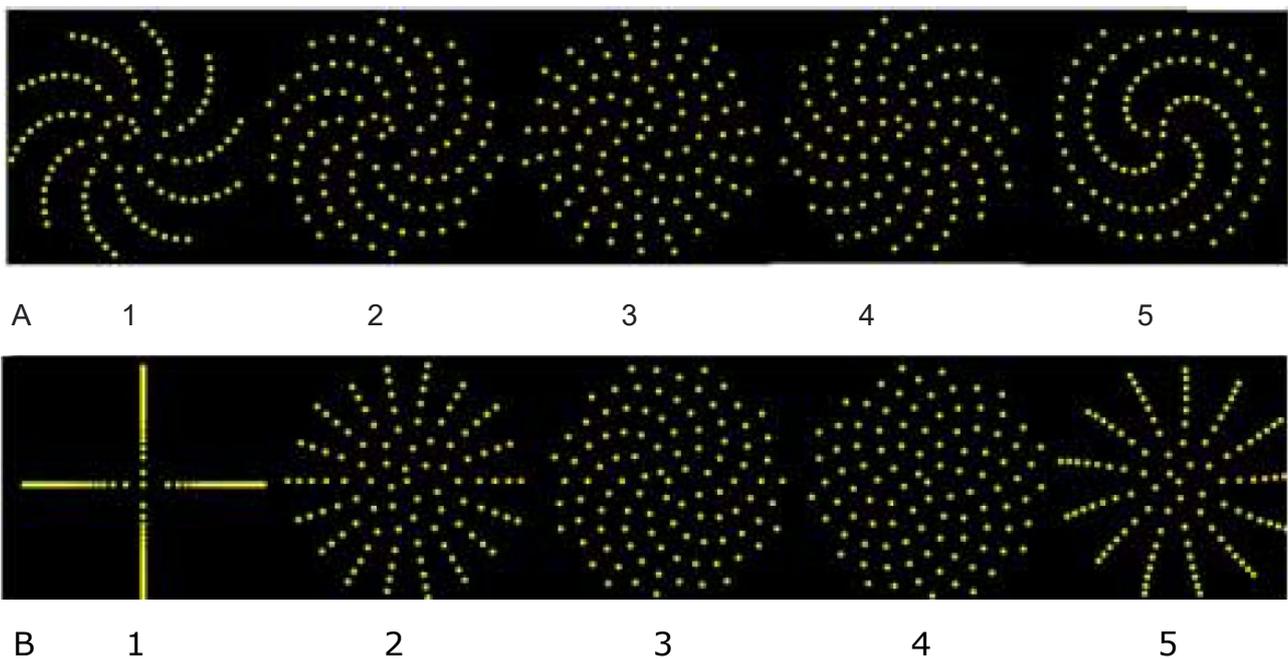


Figura 20. A. Gli angoli scelti nei cinque disegni sono rispettivamente, $36^{\circ}30'$, $37^{\circ} 0'$, $47^{\circ}0'$, $47^{\circ}30'$, $87^{\circ}30'$. Si noti che nei cinque disegni le disposizioni dei fiori non sono efficienti.

B. Gli angoli scelti nei cinque sono rispettivamente $90^{\circ}0'$, $100^{\circ}0'$, $132^{\circ}0'$, $137^{\circ} 30'$.

Osservando attentamente i disegni si nota che la disposizione più efficiente dei fiori tubolosi si realizza nel quarto disegno, ottenuto con l'angolo di **$137^{\circ}30'$** formato tra due fiori consecutivi e il centro del disegno, unto di inizio delle spirali.

Abbiamo dato pertanto una giustificazione sperimentale e formale del perché, come richiesto nel passo (1) di pagina 8 del modello matematico, i fiori devono stare su una spirale di Fermat.

Le foto utilizzate fanno parte dell'archivio dell'autore.

Alcune immagini sono state tratte dalla rete: Wikipedia.org; Wikicommons.org.

Bibliografia

- [1] Lockwood, E. H., *A Book of Curves*, Cambridge, 1967;
- [2] Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry*, New York, 1969;
- [3] Cook, T., 1979. The curves of life. Dover, New York.
- [4] Cook, T., 1903. Spirals in nature and art. *Nature* 68 (1761), 296.
- [4] Boyer C. B., *Storia della Matematica*, Milano, 1980;
- [5] Lawrence J. D., *A Catalog of Special Plane Curves*, New York, 1972;
- [6] Morris Kline. *Storia del pensiero matematico 2. Dal Settecento a oggi* 1991
- [7] Barrow John D., *Perché il mondo è matematico?* Laterza, Roma-Bari (1992).
- [8] Comicioli V., *Biomatematica: interazioni tra le scienze della vita e la matematica.*
Cap. 5. *Forme e modelli nei sistemi biologici Italia, Apogeo* (2006) (E book).
- [9] L. Geymonat, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Torino, Boringhieri, 2008.
- [10] *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni*
2017