

Evoluzione e matematizzazione di strutture e forme geometriche osservabili nei fiori delle Angiosperme

L'articolo è organizzato in tre parti. Nella prima si forniscono al lettore informazioni relative alla comparsa del fiore e alla ricostruzione dell'aspetto dell'antenato progenitore di tutti i fiori effettuata da un gruppo internazionale di ricercatori. Le sue caratteristiche sono descritte, assieme al metodo usato per realizzare l'impresa, in un articolo pubblicato su "Nature Communications" il primo agosto 2017.

Nella seconda parte ci concentreremo sulle forme geometriche visibili, che caratterizzano le infiorescenze di alcune piante erbacee, partendo dalla distinzione - fondamentale in botanica - tra fiore e infiorescenza: una struttura complessa formata da raggruppamenti ordinati di fiori di piccole dimensioni.

Le margherite, le pratoline, la camomilla, i girasoli, e altre specie della famiglia Asteraceae, non presentano fiori singoli ma infiorescenze con struttura simile, formate da fiori centrali molto piccoli addossati l'uno all'altro e da fiori più esterni, piuttosto grandi, indicati col termine "petali".

Nella terza parte, infine, saranno esposti i modelli matematici che descrivono le regolarità e le forme a spirale dei piccoli e numerosi fiori collocati nel centro dell'infiorescenza.

1. Introduzione

Quando sono comparsi i fiori sulla Terra? Uno studio condotto dallo University College London (UCL) pubblicato su Nature communications il primo agosto del 2017, rivela che i fiori sono comparsi circa 250 milioni di anni fa. Sembra plausibile, inoltre, che l'ultimo antenato comune a tutte le piante che producono semi - ossia comune sia alle piante che producono fiori, le Angiosperme, sia alle Gimnosperme, alle quali appartengono per esempio le conifere, visse fra i 350 e i 310 e milioni di anni fa. Eppure l'antenato comune a tutte le Angiosperme, le piante da **fiore**, visse in epoca abbastanza più recente: fra i 250 e i 140 milioni di anni fa. I fiori sono le strutture riproduttive delle angiosperme, che rappresentano circa il 90% di tutte le piante terrestri viventi e da cui dipende la maggior parte della vita sulla Terra, sia direttamente che indirettamente.

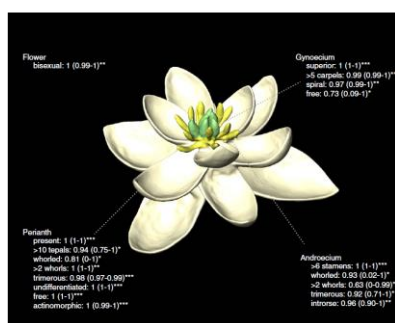


Figura 1. Ricostruzione dell'aspetto dell'antenato di tutti acquatica i fiori¹ attuali.

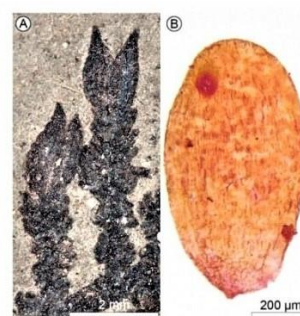


Figura 2. Il fiore e il seme fossili di *Montsechia vidalii*. Una pianta fossile che ha circa 120 milioni di anni.

L'aspetto del capostipite di tutti i fiori oggi esistenti, ovvero il fiore dell'ultimo antenato comune a tutte le piante angiosperme, è stato ricostruito analizzando oltre 13.000 caratteristiche dei fiori di 972 specie differenti, appartenenti a 63 ordini e 372 famiglie di angiosperme, che rappresentano rispettivamente il 98 e l'86 per cento di tutti gli ordini e famiglie di angiosperme.

¹ Fonti. Nature communications. Article. The ancestral flower of angiosperms and its early diversification, 1 Aug 2017.

Le scienze 02 agosto 2017. Hervé Sauquet dell'Université Paris-Sud, Jürg Schönenberger dell'Università di Vienna e colleghi hanno ricostruito le caratteristiche dei fiori delle più antiche angiosperme, e la loro successiva diversificazione.

In questa ricostruzione del fiore ancestrale sono evidenziati in **giallo gli stami** e in **verde i pistilli**. I colori sono ipotetici. Ciò nonostante, origini ed evoluzione iniziale delle angiosperme e in particolare della struttura anatomica che le definisce, cioè il fiore, è ancora poco conosciuta. Ciò perché la conservazione fossile dei fiori è molto rara, e non si conoscono reperti risalenti a prima di 110-120 milioni di anni fa.

Secondo la ricostruzione dei ricercatori, il fiore di questa angiosperma ancestrale aveva una **simmetria radiale** ed era bisessuale: ossia conteneva sia la parte maschile, **gli stami**, sia la parte femminile, **i pistilli**. Il perianzio, l'involucro del fiore, era indifferenziato superiore a dieci tepali disposti a spirale su più giri, un androceo di più di dieci stami e un gineceo di più di cinque carpelli. Il perianzio era radialmente simmetrico o actinomorfo; gli stami avevano antere ricurve, per cui spargevano il loro polline verso il centro del fiore. I carpelli erano superiori e molto probabilmente organizzati a "vortice" piuttosto che disposti a spirale: tutti gli organi floreali erano liberi l'uno dall'altro.

La ricostruzione dell'evoluzione delle forme dei fiori dal fiore ancestrale, elaborata da Hervé Sauquet & Jürg Schönenberger e colleghi, è riportata qui sotto. Nonostante le somiglianze con alcuni fiori esistenti, nessuna delle specie attualmente viventi corrisponde con esattezza alla combinazione di caratteri ottenuta dai ricercatori, neppure quelle appartenenti all'ordine delle ninfee (Nymphaeales), che maggiormente somigliano al modello, oltre che ai più antichi reperti floreali fossili noti.

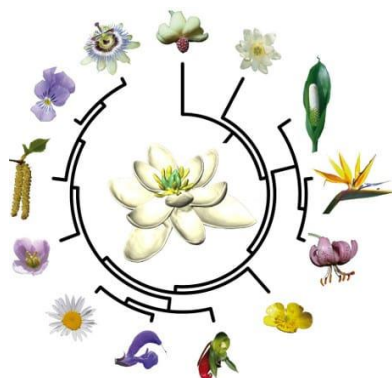


Figura 3. Ricostruzione dell'evoluzione delle forme dei fiori elaborata da Hervé Sauquet, da Jürg Schönenberger e colleghi.

Per facilitare il confronto con i fiori attuali sono riportate qui le immagini dei bellissimi fiori di *Nymphaea alba* e di *Magnolia grandiflora*, due specie dell'ordine **Nymphaeales**, che mostrano proprietà simili al fiore ancestrale. I fiori della prima specie sono formati da 4 sepalhi coriacei, persistenti, verdi all'esterno e bianchi all'interno. I sepalhi e i petali bianchi e sfumati di giallo alla base sono inseriti a spirale sull'ovario pluriloculare e ricoperto dagli stami fino lo stimma piano. Inoltre il perianzio del fiore actinomorfo della seconda specie ha forma concava, non è differenziato in sepalhi e petali, ed è formato da 6-12 tepali petaloidi liberi e disposti in verticilli elicoidali.

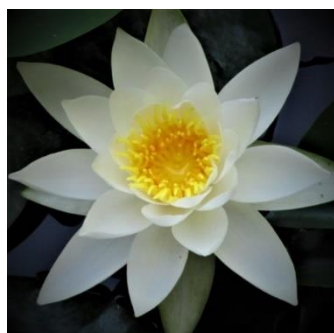


Figura 4. Fiore di *Nymphaea alba* L.

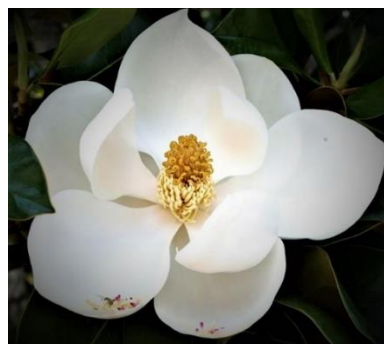


Figura 5. Fiore di *Magnolia grandiflora* L.

La ricchezza delle forme dei fiori delle Angiosperme attuali è il risultato della **coevoluzione** dei fiori e degli insetti impollinatori. I fiori hanno seguito modi originali per produrre cambiamenti ed iniziarono a farlo 130 milioni d'anni fa, nell'era del Cretacico ($145,5 \pm 4,0$ e $65,5 \pm 0,3$), quando la loro comparsa sulla Terra trasformò i paesaggi naturali. "La storia della vita è stata scritta nella corolla". Se tutta la storia della vita sulla Terra fosse compressa in una sola ora, le piante a fiore esisterebbero da 90 secondi appena! Dal momento in cui iniziarono a diffondersi stabilmente negli ecosistemi terrestri, circa 100 milioni d'anni fa, si diversificarono rapidamente in una miriade di varietà, da quali presero origine la maggior parte delle famiglie floreali oggi esistenti.

Le piante da fiore rappresentano oggi circa il 90 per cento delle specie floristiche, in particolare sono in proporzione di venti a uno rispetto a felci e conifere, che avevano prosperato indisturbate per 200 milioni d'anni, fino all'alba della prima fioritura. Le Angiosperme hanno contribuito in modo rilevante alla trasformazione della fauna e della flora degli ecosistemi terrestri e costituiscono attualmente una fonte di nutrimento essenziale tanto per gli uomini quanto per gli animali. Tanto che Walter Judd² dice: "Se non fosse per i fiori, noi umani oggi non saremmo qui".

2. Forme geometriche spiraliformi nelle infiorescenze delle Angiosperme.

La macchia mediterranea è forse l'ambiente naturale nel quale si può ammirare meglio, in primavera, la straordinaria ricchezza dei colori e delle forme geometriche delle infiorescenze e dei fiori delle Angiosperme. Imparare a osservare le forme geometriche nel mondo vegetale è importante, tanto quanto conoscere e comprendere la differenza tra i concetti di fiore e di infiorescenza. Quest'ultima è formata da raggruppamenti ordinati di piccoli fiori. Esempi caratteristici sono le infiorescenze delle margherite e di altre specie con struttura simile, come le pratoline, la camomilla, i girasoli, ecc. L'entità floristica complessa, che sembra avere la forma di un fiore risulta essere in realtà una infiorescenza formata da fiori tubolosi molto piccoli e numerosi e quasi invisibili, disposti nel suo centro. Osservando con una lente di ingrandimento la loro disposizione si possono vedere regolarità molto particolari: ad esempio vediamo che i floscoli sono appressati l'uno all'altro e formano curve spiraliformi, che partono dal centro del disco giallo e si estendono fino al limite del disco stesso.

Immagini di infiorescenze spiraliformi formate dai fiori tubolosi del disco ed esibite da alcune specie della famiglia delle Asteraceae sono qui di seguito riportate.



Figura. 6. *Pellenis spinosa* L.
Asterisco spinoso.



Figura.7. *Glebionis segetum* L.
Crisantemo campestre.

² Walter Judd è un botanico dell'Università della Florida.



Figura. 8. *Bellis perennis* L.
Pratolina comune.



Figura 9. *Cota tinctoria*
Camomilla per tintori.

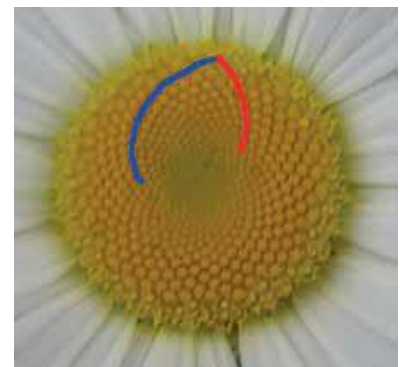


Figura.9 bis. Colorazione di due spirali con versi opposti.

Esaminiamo l'**infiorescenza** della specie *Cota tinctoria* di fig. 5 per denominare le due parti della sua struttura. I piccoli fiori **centrali** a forma cilindrica formano il **disco**: sono addossati l'uno all'altro e disposti lungo **spirali**, orientate alcune in verso orario e altre in senso antiorario, che partono dal centro del raggio: è questa una disposizione molto compatta inventata dalla natura per ridurre al minimo gli spazi vuoti tra un fiore e l'altro e favorire così l'assorbimento di tutta l'energia solare incidente sul disco.

Le curve spiraliformi presenti nelle infiorescenze delle Asteracee si formano perché i fiori tubulosi più giovani, che si formano progressivamente nella zona centrale, spingono quelli più vecchi nella parte esterna del disco. L'effetto complessivo è la formazione delle linee curve, che assomigliano proprio a delle spirali, evidenziate nelle immagini delle fig. 6-9.

I fiori ligulati del raggio contornano il disco e formano il **capolino**, che presenta approssimativamente una **simmetria raggiata** o circolare. I fiori del raggio sono in sostanza i **petali** che derivano dai fiori tubulosi del disco. Se provate a contarli quando passeggiate in campagna troverete che il capolino è formato da 34 petali.



Figura 9 ter. (a). Infiorescenza di Camomilla per tintori. (b). Suddivisione dell'infiorescenza. (c). Ciascun disco ha 13 spirali in senso orario e 21 spirali in senso antiorario.

Fonti. Immagine b. Quaderno 13 Orto botanico Trieste. Immagine c. Wikipedia.

Si osservino con attenzione le disposizioni dei fiori tubulosi nei dischi delle infiorescenze nelle immagini 6-9 bis. Nei dischi risultano evidenti due serie di curve spiraliformi orientate in senso orario e antiorario: partono dal centro del disco giallo e terminano sui bordi esterni.

Un metodo pratico per contare le spirali è il seguente. Si taglia l'infiorescenza da una pianta, ci si munisce di una lente di ingrandimento, si colora con un pennarello un fiore tubuloso posto sul bordo esterno e si inizia a contare i fiori che appartengono alla stessa spirale del primo colorando i fiori con lo stesso colore nel corso del conteggio. Si traccia così la spirale che dal bordo si dirige verso la zona centrale del disco (fig.9c). Si osservi la spirale per determinarne l'andamento complessivo. Sarà "**orario**" se i bracci,

partendo dal centro, "piegano" dalla stessa parte in cui ruotano le lancette di un orologio, "antiorario" nel caso opposto. Individuata così questa spirale, si contano tutte le successive che hanno lo stesso andamento della prima, fino a ritornare alla spirale immediatamente precedente a quella contrassegnata col colore del pennarello.

Un metodo adottato da un giardiniere per costruire una spirale orientata in senso orario è il seguente: si prende una corda lunga qualche metro e si fanno due capi alle sue estremità. Si fissa poi un paletto nel terreno e si inserisce in esso uno dei due capi e lo si blocca al paletto in modo che non possa girargli intorno; si prende poi un picchetto, si inserisce il cappio libero della corda sul picchetto e lo si fa scorrere sul terreno tenendo la corda sempre tesa. Mentre il picchetto gira intorno al paletto la lunghezza della corda aumenta perché si svolge attorno al paletto stesso. Il picchetto tratterà, quindi, sul terreno un solco curvo a forma di spirale. Se invece si opera in modo che il cappio bloccato al paletto si avvolga attorno al paletto stesso, il picchetto tratterà sul terreno un solco che ha la forma di una spirale antioraria. Einstein diceva: "...la nostra conoscenza, se paragonata alla realtà è primitiva e infantile. Eppure è il bene più grande che possediamo".

Le spirali delle margherite e di altre specie appartenenti alla famiglia delle Asteraceae sono modelli naturali che esprimono regolarità e forme geometriche osservabili che ricorrono anche in altri contesti reali. Nella prossima sezione concentreremo l'attenzione sulla modellazione matematica di queste configurazioni geometriche.

3. Ricerca del modello matematico che descrive le spirali delle infiorescenze della Pratolina, della Margherita comune, dell'Asterisco spinoso e della Camomilla dei tintori.

Galileo galilei, il padre del metodo sperimentale scrive:

«La filosofia [della natura] è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto dinanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi [sic] è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto». Il Saggiatore (1623), in Opere, vol. VI, p. 232.

«Ma io veramente stimo il libro della filosofia, esser quello che perpetuamente ci sta aperto dinanzi agli occhi; ma perché è scritto in caratteri diversi da quelli del nostro alfabeto, non può esser da tutti letto: e sono i caratteri di tal libro triangoli, quadrati, cerchi, sfere, con, piramidi et altre figure matematiche, attissime per tal lettura». Lettera alla Serenissima madama la Granduchessa Madre, Cristina di Lorena, Opere, vol. V, pp. 316-317.

Un modello matematico è una descrizione quantitativa di un fenomeno naturale, di un sistema fisico o di una semplice forma geometrica, che utilizza i concetti e il linguaggio della matematica. È, in senso lato, una corrispondenza funzionale e quantitativa tra le grandezze che caratterizzano e descrivono il fenomeno oggetto di indagine. Il modello analitico più semplice è in genere espresso da $y=f(x)$ e può essere rappresentato su un piano bidimensionale da un grafico, una curva che visualizza la relazione formale tra le variabili in gioco e ne sintetizza l'evoluzione al variare dei loro valori.

In matematica il sistema di coordinate bidimensionale più utilizzato è il piano cartesiano \mathbb{R}^2 . È costituito da due assi ortogonali convenzionalmente chiamati asse x (o asse delle ascisse), e asse y (o asse delle ordinate). Un punto generico del piano è univocamente individuato da una coppia ordinata di numeri reali (x, y) . In simboli si scrive $P(x, y)$: x e

y sono le *coordinate cartesiane* di P. L'espressione di un punto come coppia ordinata è nota come notazione cartesiana. L'equazione di una curva in coordinate cartesiane è espressa da $y=f(x)$ o da $(x, f(x))$ ed è nota come equazione cartesiana. Il suo grafico è costituito dai punti del piano punti del piano di coordinate $(x, f(x))$ ed è noto come grafico cartesiano.

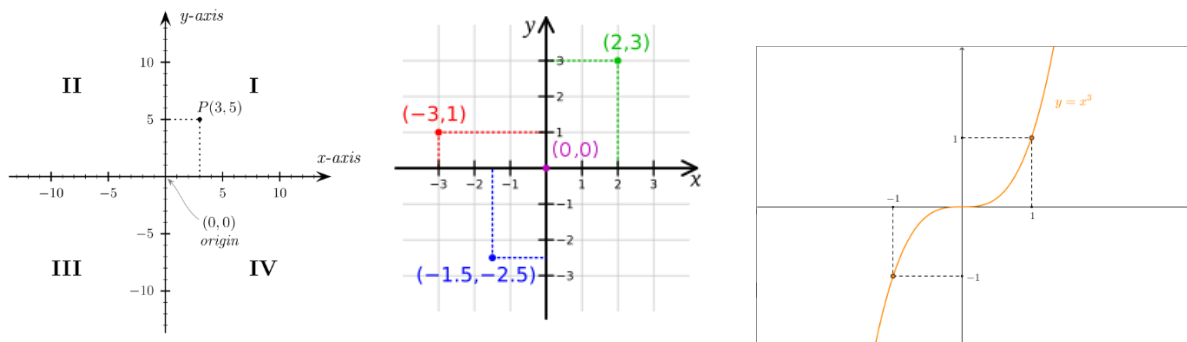


Figura 12 a b c

(a). Illustrazione di un piano di coordinate cartesiane. Quattro punti sono contrassegnati ed etichettati con le loro coordinate: $(2, 3)$ in verde, $(-3, 1)$ in rosso, $(-1,5, -2,5)$ in blu e l'origine $(0, 0)$ in viola. (b). I quattro quadranti di un sistema di coordinate cartesiane. (c). Grafico della funzione elementare $y = x^3$. Fonte wikipedia.

Nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 si può introdurre anche il **sistema di coordinate polari** in due dimensioni, dove ogni punto del piano è identificato univocamente dalla coppia ordinata (θ, r) , dove l'angolo θ è orientato in senso antiorario ed r è la distanza da un punto fisso detto polo. In simboli si scrive: $P(\theta, r)$.

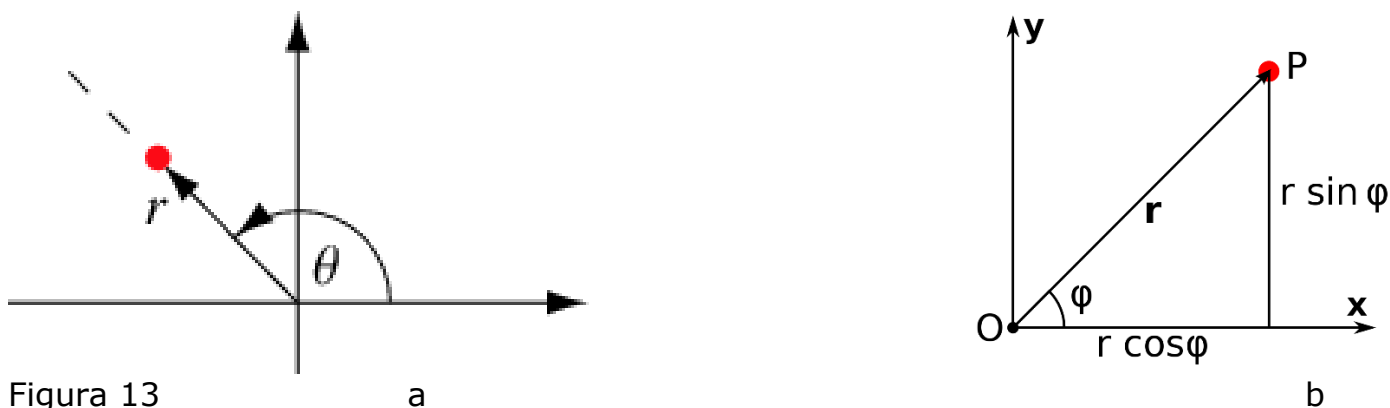


Figura 13 a b

Figura 13. (a) Un punto di è univocamente determinato dalle coordinate polari: $P(\theta, r)$. θ è l'angolo formato dalla semiretta OP e dall'asse x positivo ed r è la distanza da un punto fisso O, detto origine del piano. (b). Esiste una semplice relazione tra le coordinate cartesiane (x, y) e le coordinate polari (r, θ) espressa da $x = r \cos \theta$, e $y = r \sin \theta$. In particolare nella fig.13 b si ha: $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$.

Osserviamo che nei due sistemi di coordinate esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le loro coordinate cartesiane o polari. L'espressione di un punto come coppia ordinata è nota come notazione polare, l'equazione di una curva espressa in coordinate polari è nota come equazione polare e il grafico di una curva in coordinate polari è noto come grafico polare. In molti casi, tale equazione può essere semplicemente specificata definendo r come una funzione dell'angolo φ . La curva risultante è quindi costituita dai punti del piano di coordinate $(r(\varphi), \varphi)$, con $r(\varphi)$ una funzione polare di cui si può rappresentare il grafico, in cui la variabile indipendente è la seconda coordinata della coppia ordinata, cioè l'angolo φ , diversamente dalla coppia $(x, f(x))$, dove la variabile indipendente occupa il primo posto.

4. Elaborazione del modello matematico che descrive le spirali delle infiorescenze delle margherite e simili.

Supponiamo che la coppia $(r(\theta), \theta)$ esprima una relazione di proporzionalità diretta tra il raggio $r(\theta)$ e θ , cioè che sia $r(\theta) \propto \theta$, dove $r(\theta)$ denota la distanza del punto $P(r(\theta), \theta)$ dal polo $O(0,0)$. Detta k la costante reale di proporzionalità essa assume la forma

$$r(\theta) = k \cdot \theta \quad (1)$$

che esprime la variazione della distanza di $P(r(\theta), \theta)$ che ruota in verso antiorario attorno al centro $O(0,0)$ in funzione dell'angolo θ : r è la lunghezza del raggio dal centro O , o inizio, della spirale, e θ è l'angolo tracciato dal raggio che ruota intorno ad O . La (1) per $k = 1$ diventa $r(\theta) = \theta$ che è l'equazione polare della spirale di Archimede. Dal punto di vista fisico la spirale di Archimede è il luogo corrispondente alle posizioni nel tempo di un punto che si allontana da un punto fisso con velocità costante lungo una retta che ruota con velocità angolare costante ω_0 . Il punto $P(r, \theta)$ in coordinate polari può essere in generale descritto dall'equazione lineare più generale

$$r = a + k \cdot \theta$$

con a e b sono numeri reali. Al variare del parametro a il punto centrale della spirale si sposta verso l'esterno rispetto all'origine: se $a \geq 0$ verso $\theta = 0$, mentre se $a < 0$ verso $\theta = \pi$. Il parametro b controlla, invece, la distanza tra le spire. Se b è costante la distanza tra le spire è costante. Se $a = 0$ otteniamo $r(\theta) = k \cdot \theta$ (1); se $k = 1$ allora $r(\theta) = \theta$ e si ottiene l'equazione polare della spirale di Archimede il cui grafico è:

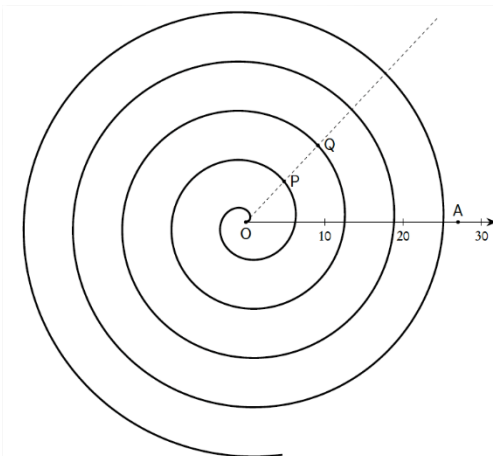


Figura 14. Spirale uniforme di Archimede di equazione polare $r(\theta) = \theta$ di centro O . La distanza tra due spire o bracci misurata lungo una semiretta avente origine nel polo O , è costante. Fonte. Spirali, eliche elicoidi di Luciano Battaia.

Osserviamo che $r(\theta) = \theta$ è l'equazione in coordinate polari analoga alla funzione identità $y = x$ in coordinate cartesiane, il cui grafico è la bisettrice del primo e terzo quadrante. La curva rappresenta il modello di legge di proporzionalità diretta che ha numerose applicazioni nella scienza. Ribadiamo che in $r(\theta) = \theta$ la variabile r denota la lunghezza del raggio dal centro, punto di inizio, della spirale, e θ è la posizione angolare del raggio. Come le scanalature in un disco fonografico, la distanza tra le spire successive della spirale è una costante pari a $2\pi a$, se la si misura in radianti.

In fig. 15 sono rappresentati i grafici delle spirali delle funzioni polari $r = k \theta^n$ per $k = 1$, $n = 2$ e $n = 3$.

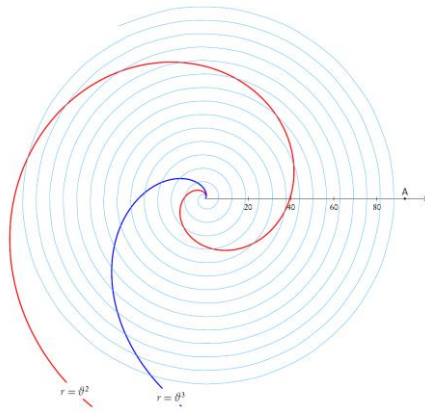


Figura 15. Grafici delle spirali di equazione polare $r = \theta^n$: la curva in rosso è il grafico di $r = \theta^2$, la curva in blu è il grafico di $r = \theta^3$. Fonte. L. Battaia. Spirali eliciche elicoidi.

Le spirali monocentriche più note, simili alla spirale di Archimede e chiamate spirali archimedee, sono:

1. la **spirale di Fermat**, che ha equazione polare $r = k \cdot \theta^{\frac{1}{n}} = k\sqrt[n]{\theta}$;
2. la **spirale iperbolica**, che ha equazione polare $r = k \cdot \frac{1}{\theta}$;
3. la **spirale logaritmica**, che ha equazione polare $r = k \cdot e^{b\theta}$: r è la distanza dal polo $O(0,0)$; θ è l'angolo prodotto dalla rotazione del raggio dall'asse x ; a , b e k sono costanti reali arbitrarie.

Qui di seguito sono riportati i grafici polari delle spirali suddette.

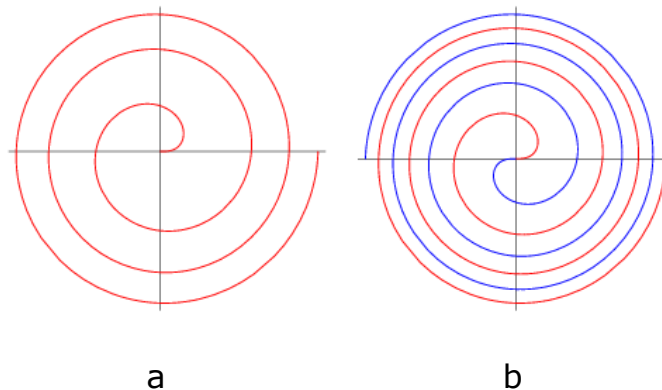


Figura 15. (a) Grafico polare della spirale di Fermat. (b) Sovrapposizione di due spirali di Fermat aventi versi opposti. Fonte. Wolfram Math World.

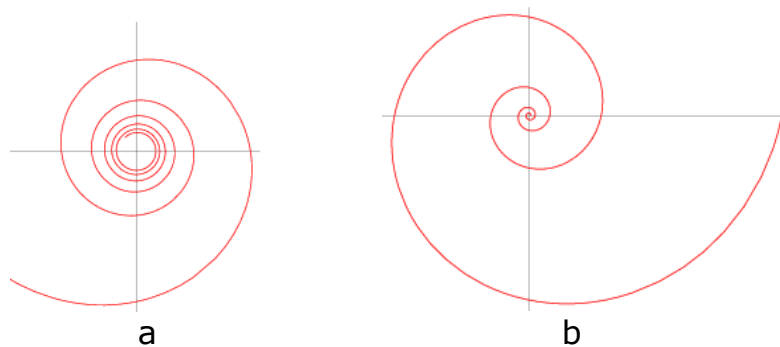


Figura 16. (a) Grafico della spirale iperbolica. (b) Grafico della spirale logaritmica
Fonte. Wolfram Math World.

Tra le spirali sopra definite quella più interessante per descrivere matematicamente le forme a spirale dei fiori tubulosi della margherita e di altre specie botaniche della

famiglia delle Asteracee è la spirale di Fermat. Il senso di questa affermazione sarà chiarito qui di seguito. A tal fine fissiamo l'attenzione sulla fig. 17 (a), dove sono stati disegnati 6 fiori tubulosi sui due bracci della spirale in parola. Il primo fiore è stato posto nel centro della spirale ed è contrassegnato con "1", il secondo e il terzo sono stati collocati sul primo braccio ed etichettati con "2" e con "3". Il quarto, il quinto e il sesto stati disposti sul secondo braccio, etichettandoli, rispettivamente, con "4", "5" e "6". L'angolo formato dai segmenti che congiungono due fiori consecutivi con il centro della spirale misura $137^{\circ} 30'$.

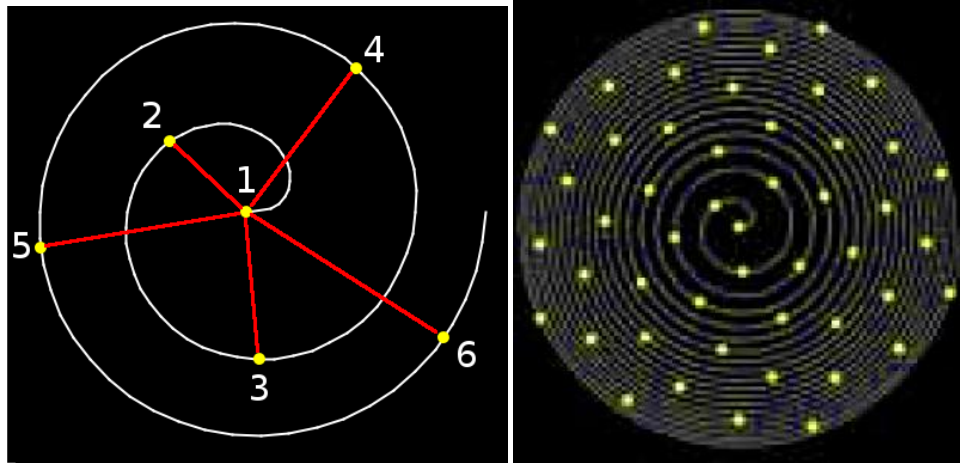


Figura 17. a b
 (a). Su una spirale in bianco di Fermat sono stati raffigurati 6 fiori tubulosi. I sei segmenti congiungono due fiori consecutivi col centro. L'angolo sotteso agli archi $\widehat{2-3}$, $\widehat{3-4}$ e $\widehat{5-6}$ misura $137^{\circ} 30'$ (b). Rappresentazione di circa 60 fiori tubulosi su una spirale di Fermat. Fonte. Quaderno 13, Orto botanico Trieste.

5. Il modello matematico

Una giustificazione matematica delle forme geometriche spiraliformi dei fiori tubulosi dell'Asterisco spinoso (fig.6), del Crisantemo campestre (fig.7), della Pratolina comune (fig.8), della Camomilla per tintori (fig.9) e delle infiorescenze di altre specie della famiglia delle Asteraceae, è fornita dal modello matematico qui proposto, fondato sulle due seguenti ipotesi:

- I. i fiori tubulosi che si sviluppano progressivamente dal centro del disco, si dispongono su una spirale di Fermat;
- II. le posizioni occupate dai fiori sono tali che i segmenti che congiungono due fiori che nascono consecutivamente col centro della spirale, formano sempre un angolo di circa $137^{\circ}30'$.

La verifica della consistenza di questo modello può essere fatta simulando configurazioni spiraliformi di fiori che devono essere aderenti alle forme riscontrate nella realtà. A tal fine si parte da una spirale di Fermat e si mostra come i fiori tubulosi devono svilupparsi perché la forma geometrica finale sia proprio una spirale di Fermat. Notiamo che i 6 fiori tubulosi disegnati sui due bracci della spirale di figura 17 sono in accordo con la regola (II). Ebbene le regolarità nella disposizione dei fiori emergono solo quando i fiori sono molto numerosi, come si osserva nella fig. 18, nella quale i fiori sono circa 300. In questa situazione il modello proposto sembra in grado di descrivere un caso reale.

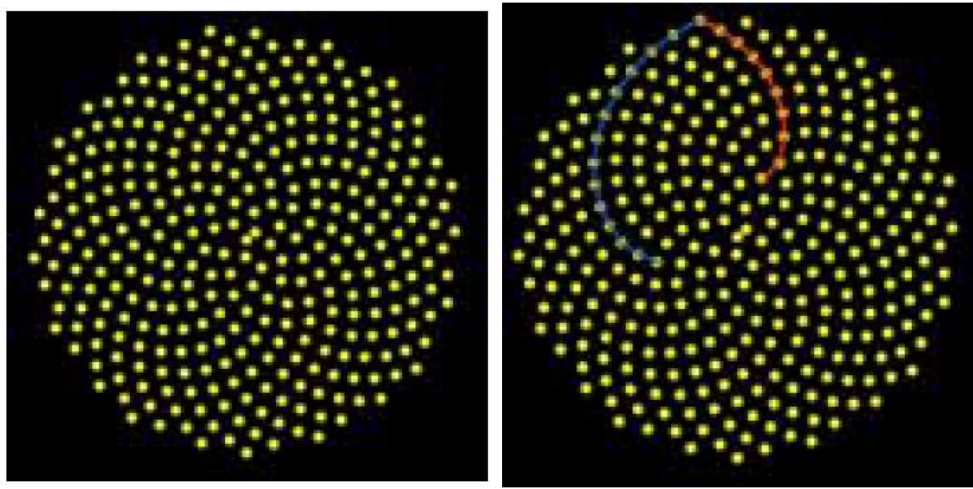


Figura 18.

a

b

- (a). Spirali formate da circa 300 fiori tubulosi che formano delle spirali.
 (b). In questo caso sono 21 in senso orario (blu) e 34 in senso antiorario (rosso).

Fonte. Quaderno 13. Orto botanico Trieste.

Si può dimostrare in via matematica che la curva rossa e la curva blu sono proprio spirali di Fermat,

$$r = k \cdot \theta^{\frac{1}{n}} = k\sqrt[n]{\theta}.$$

ciascuna con un diverso valore della costante k , che sono chiamate spirali secondarie.

Riepiloghiamo i punti chiave che il modello sopra descritto prevede:

- I. I fiori di una margherita, di un asterico spinoso o di una camomilla dei tintori si dispongono lungo una spirale di Fermat se è soddisfatta la regola che prevede che tra un fiore tubuloso e quello successivo del disco ci sia un angolo determinato di circa **137°30'**;
- II. La disposizione dei fiori che avviene con questa regola fa sì che si sviluppino in **modo naturale** delle **spirali di Fermat**, interamente visibili quando si osserva una infiorescenza. Alcune spirali sono orientate in senso orario e altre in senso antiorario, ma sono differenti pure in numero: quelle orarie sono più numerose di quelle antiorarie. Delle spirali formate con i 300 fiori tubulosi di fig. 18 quelle con andamento orario sono 21, mentre quelle con verso antiorario sono 34. Se le spirali ad andamento orario di un disco di fiori tubulosi sono 55 quelle antiorarie sono 89. I numeri 21, 34, 55, 89 sono numeri consecutivi della successione di Fibonacci.

A questo punto proseguiremo il discorso con l'obiettivo di fornire una giustificazione del modello matematico proposto, dando una risposta a ciascuna delle due domande:

- i. Perché i fiori tubulosi del disco si sviluppano secondo una spirale di Fermat?
- ii. Perché l'angolo di **137°30'** sembra giocare un ruolo così importante?

La risposta alla domanda (i) richiede di realizzare ed interpretare un semplice esperimento che qui sarà qui descritto. Si prende un foglio di carta assorbente e con un contagocce si lascia cadere una goccia di inchiostro nero sul foglio in un certo istante, t_0 , ad esempio alle 9.00. Man mano che l'inchiostro verrà assorbito dalla carta si formerà una macchia nera, che si suppone abbia una forma circolare. Il suo raggio r_1 , dopo un certo $\Delta t = t_1 - t_0$, diciamo un minuto, raggiungerà un valore massimo, quando tutto l'inchiostro è stato assorbito dalla carta. Supponiamo che sia $S_1 = \pi r_1^2$ l'area di questo disco. Tenendo fermi il contagocce e la carta, facciamo cadere una seconda

goccia di inchiostro. Dopo un altro minuto, cioè dopo 2 minuti dall'inizio dell'esperimento, il disco nero si sarà ingrandito e avrà un raggio r_2 , tale che la sua area sarà $S_2 = \pi r_2^2 = 2 \pi r_1^2 = 2 S_1$ perché è raddoppiato l'inchiostro. Quindi a $t_2 = 2$ min la macchia avrà area $2 S_1$. Se facciamo cadere una terza goccia di inchiostro, dopo un altro minuto, cioè al tempo $t_3 = 3$ min, il raggio sarà r_3 e la macchia avrà area $S_3 = \pi r_3^2 = 3 S_1$ e così via. Iterando il procedimento si avrà che dopo n minuti il raggio della macchia sarà $r_n = \pi r_n^2 = n S_1$.

Ricavando da queste equazioni le relazioni tra i raggi delle macchie si ottiene:

$$r_2 = r_1\sqrt{2}, r_3 = r_1\sqrt{3} \text{ e } r_n = r_1\sqrt{n}.$$

Dove r_n è il raggio della macchia dopo n minuti ed r_1 è costante in quanto è il raggio della prima macchia nera circolare prodotta dall'assorbimento della prima goccia.

Abbiamo così ottenuto una successione di circonferenze concentriche aventi raggi

$$r_1, r_2, r_3 \dots r_n.$$

In fig.19a sono rappresentate le prime sei circonferenze concentriche di questa successione, i cui raggi sono, rispettivamente, $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2 = \sqrt{4}, \sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$. In fig. 19b è rappresentato la spirale di Fermat di equazione polare $r = \sqrt{\theta}$. Il grafico di fig.9c illustra, invece, la sovrapposizione dei grafici 9a e 9b.

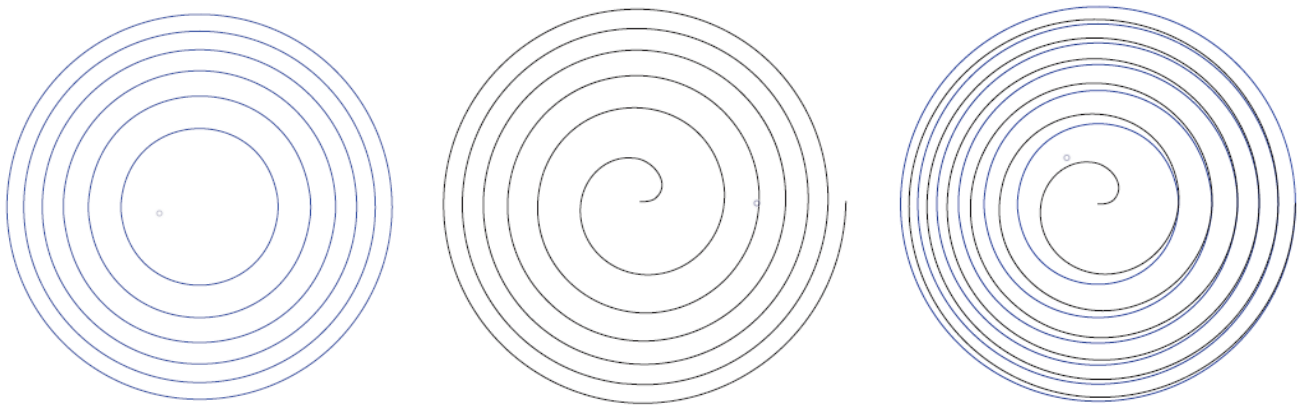


Figura 19. a b c
 (a) . Grafico dei sei cerchi concentrici di raggio, rispettivamente, $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2 = \sqrt{4}, \sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$.
 (b) . Grafico dei primi sei bracci della spirale di Fermat di equazione $r = \sqrt{\theta}$.
 (c) . Sovrapposizione dei grafici (a) e (b). Fonte quaderno 13, Orto botanico di Trieste.

L'equazione $r_n = r_1\sqrt{n}$ tra il raggio r_n della circonferenza n -esima e il raggio r_1 della prima esprime una relazione di proporzionalità diretta tra r_n e la \sqrt{n} con costante di proporzionalità r_1 . Essa è formalmente analoga alla equazione polare $r = k\sqrt{\theta}$ della spirale di Fermat, che esprime la proporzionalità diretta tra il raggio r e la radice dell'angolo θ . Quindi è plausibile assumere che le sei circonferenze della figura 19a siano un'approssimazione dei primi sei bracci della spirale di Fermat, rappresentata nella figura 19b. Notiamo che la macchia che si forma facendo gocciolare l'inchiostro sulla carta assorbente è un **fenomeno discreto**: si sviluppa di fatto in **intervalli costanti di tempo**. Quindi la macchia risulta racchiusa in un numero finito di circonferenze di dimensioni via via maggiori. Siccome le curve sul piano sono continue dobbiamo immaginare che l'inchiostro scenda in modo continuo. Da questa ipotesi è naturale e plausibile attendersi che:

- l'incremento della lunghezza della circonferenza o perimetro della macchia sul foglio debba variare in modo continuo;
- il raggio aumenti proporzionalmente alla radice quadrata del tempo, cioè $r = \sqrt{t}$.

Da ciò consegue che il raggio, istante per istante, sarebbe determinato da un punto che si muove su una spirale di Fermat. Questo ragionamento è, ovviamente, un'astrazione

matematica per passare dalla descrizione matematica discreta del fenomeno dell'espansione delle gocce di inchiostro sulla carta assorbente alla descrizione formale continua.

La goccia di inchiostro rappresenta, per analogia, i fiori prodotti dalla pianta in un certo intervallo di tempo. È plausibile aspettarsi che la pianta nello stesso intervallo di tempo produca sempre lo stesso numero di fiori, che devono sistemarsi sul disco del capolino, similmente a come l'inchiostro viene assorbito dalla carta.

L'analogia con lo sviluppo dei fiori di una margherita, ad esempio della Pratolina comune di fig. 8, con le premesse precedenti dovrebbe essere abbastanza naturale.

La rappresentazione della disposizione dei fiori tubolosi del disco nel modello matematico $r = \sqrt{\theta}$ in funzione dell'angolo formato tra due fiori consecutivi e il centro del disegno è riportata nei dieci disegni della fig. 20. In ciascuno dei 10 disegni i fiori sono circa un centinaio.

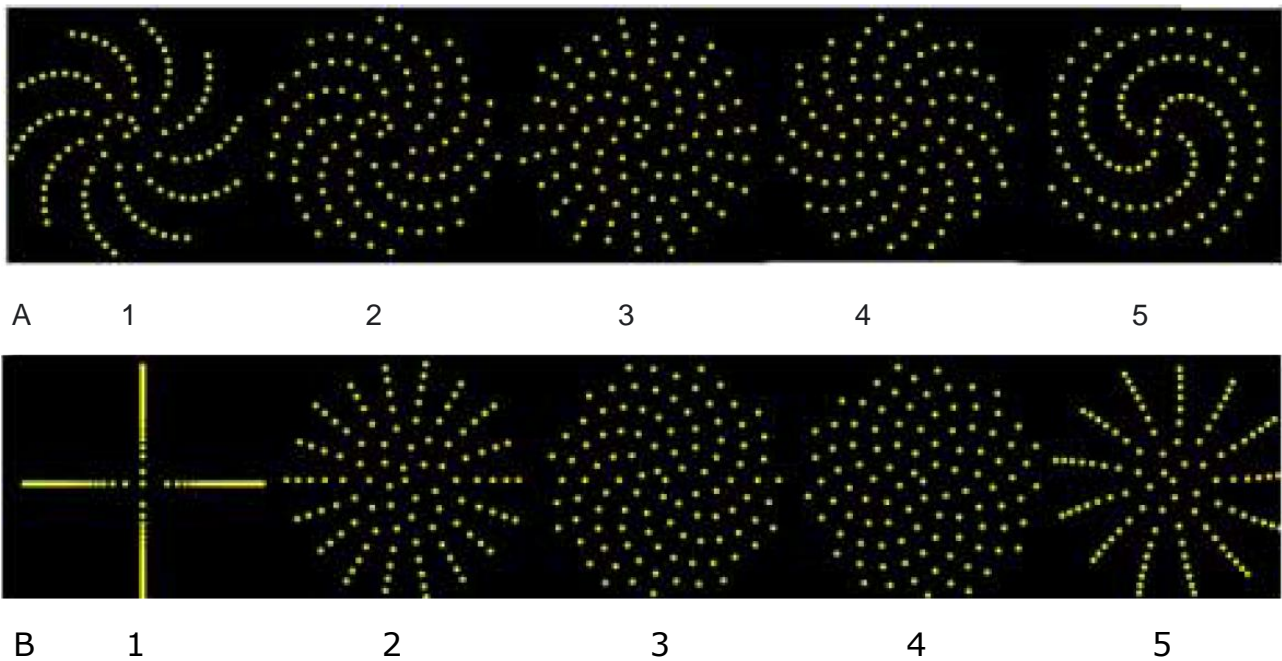


Figura 20. A. Gli angoli scelti nei cinque disegni sono rispettivamente, $36^{\circ}30'$, $37^{\circ} 0'$, $47^{\circ}0'$, $47^{\circ}30'$, $87^{\circ}30'$. Si noti che nei cinque disegni le disposizioni dei fiori non sono efficienti.

B. Gli angoli scelti nei cinque sono rispettivamente $90^{\circ}0'$, $100^{\circ}0'$, $132^{\circ}0'$, $137^{\circ} 30'$.

Osservando attentamente i disegni si nota che la disposizione più efficiente dei fiori tubolosi si realizza nel quarto disegno, ottenuto con l'angolo di **$137^{\circ}30'$** formato tra due fiori consecutivi e il centro del disegno, unto di inizio delle spirali.

Abbiamo dato pertanto una giustificazione sperimentale e formale del perché, come richiesto nel passo (1) di pagina 8 del modello matematico, i fiori devono stare su una spirale di Fermat.

Le foto utilizzate fanno parte dell'archivio dell'autore.

Alcune immagini sono state tratte dalla rete: Wikipedia.org; Wikicommons.org.

Bibliografia

- [1] Lockwood, E. H., *A Book of Curves*, Cambridge, 1967;
- [2] Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry*, New York, 1969;
- [3] Cook, T., 1979. The curves of life. Dover, New York.
- [4] Cook, T., 1903. Spirals in nature and art. *Nature* 68 (1761), 296.
- [4] Boyer C. B., *Storia della Matematica*, Milano, 1980;
- [5] Lawrence J. D., *A Catalog of Special Plane Curves*, New York, 1972;
- [6] Morris Kline. *Storia del pensiero matematico 2. Dal Settecento a oggi* 1991
- [7] Barrow John D., *Perché il mondo è matematico?* Laterza, Roma-Bari (1992).
- [8] Comicioli V., *Biomatematica: interazioni tra le scienze della vita e la matematica.*
Cap. 5. *Forme e modelli nei sistemi biologici Italia, Apogeo* (2006) (E book).
- [9] L. Geymonat, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Torino, Boringhieri, 2008.
- [10] *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni*
2017